درس احتمال و کاربردها
نیم سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

تمرینات بخش اصول احتمال و مسائل شمارشی

مدرس: دکتر حمیدرضا فنایی

گردآورندگان:

علی الماسی (دانشگاه صنعتی شریف)

نیوشا نجمایی (دانشگاه پلی‌تکنیک تورین)

---

۱. یک سکه‌ی سالم را به‌طور متوالی پرتاب می‌کنیم. اثبات کنید حتما شیر خواهیم دید!

۲. فرض کنید $E_۱, E_۲, \ldots$ دنباله‌ای از پیشامدها در یک فضای نمونه‌ای باشند به‌طوری‌که برای هر i، $P(E_i) = ۱$. ثابت کنید $P(\bigcap_{i=۱}^{\infty} E_i) = ۱$.

۳. (آ) سکه‌ای را بی‌نهایت بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنید ω عضوی از فضای نمونه‌ای باشد. احتمال $\{\omega\}$ چقدر است؟

(ب) دو نقطه‌ی تصادفی را از بازه‌ی $[۰, ۱]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این دو نقطه با هم برابر باشند چقدر است؟

(ج) احتمال این‌که عدد تصادفی انتخاب شده از بازه‌ی $[۰, ۱]$ گویا باشد چقدر است؟

۴. **(نامساوی بول)** فرض کنید $A_۱, A_۲, A_۳, \ldots$ دنباله‌ای از پیشامدهای یک فضای نمونه‌ای باشند. ثابت کنید:

$$P\Big(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n)$$

۵. اگر E_iها پیشامدهای یک فضای نمونه‌ای باشند نشان دهید:

$$P(E_۱ \cap E_۲ \cap \cdots \cap E_n) \geq P(E_۱) + \cdots + P(E_n) - (n-۱)$$

۶. **(پارادوکس دختر یا پسر از مارتین گاردنر)**

(آ) مردی دو فرزند دارد. فرزند بزرگتر دختر است. احتمال این‌که هر دو فرزندش دختر باشند چقدر است؟

(ب) مردی دو فرزند دارد. حداقل یکی از آن‌ها پسر است. احتمال این‌که هر دو فرزندش پسر باشند چقدر است؟

۷. (آ) فرض کنید $C_۱, C_۲, \ldots$ دنباله‌ای از پیشامدها باشند به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} P(C_n) = ۰$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} P(C_n \backslash c_n) < \infty$ باشد. نشان دهید که

$$P(\bigcap_{n=۱}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k) = ۰$$

(ب) در حالت قبل فرض کنید که $\sum_{n=۱}^{\infty} P(C_n \backslash c_n) = \infty$ باشد. آیا می‌توان به یکی از دو نتیجه‌ی

$$P(\bigcap_{n=۱}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k) = ۰$$

یا

$$P(\bigcap_{n=۱}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k) \neq ۰$$

رسید؟ (درستی ادعای خود را ثابت کنید.)

۸. فرض کنید به ازای هر $q \in \mathbb{N}$، $G(q)$ یک زیرمجموعه‌ی دلخواه qعضوی از مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \ldots, 2q\}$ باشد. همین‌طور فرض کنید که $m \in \{1, 2, \ldots, q\}$ باشد. احتمال این‌که عضوی به‌تصادف از $G(q)$ انتخاب شود و $y + m(\mod 2q + 1)$ عضو $G(q)$ نباشد را با $P(y + m \notin G(q))$ نمایش می‌دهیم. نشان دهید:

$$\lim_{q \to \infty} max_{1 \leq m \leq q} P(y + m \notin G(q)) \neq 0$$

۹. نشان دهید اصل سوم کلموگروف در حالت شمارا را می‌توان با استفاده از قضیه‌ی پیوستگی احتمال و اصل سوم در حالت متناهی نتیجه گرفت.

۱۰. در یک کشو تعدادی جوراب به رنگ‌های قرمز و مشکی وجود دارد. ۲ جوراب را به تصادف از کشو درمی‌آوریم. فرض کنید احتمال آن‌که هر دو قرمز باشند $\frac{1}{2}$ باشد و بدانیم تعداد جوراب‌های آبی زوج است. حداقل چند جوراب داخل کشو وجود دارد؟

۱۱. تاس عجیبی داریم که پنج‌وجهی متقارن است و روی آن اعداد ۱ تا ۵ را نوشته‌ایم. این تاس را ۱۰ مرتبه پرتاب می‌کنیم. احتمال زوج‌بودن مجموع ۱۰ عدد رو شده چقدر است؟

۱۲. n زوج با هم برای صرف شام به رستوران می‌روند و دور یک میز ۲ نفره می‌نشینند. هر فردی به صورت تصادفی یک صندلی دور میز را برای نشستن انتخاب می کند. چقدر احتمال دارد که هیچ زوجی کنار هم قرار نگرفته باشند؟

۱۳. احسان ۱۲۰ سکه دارد که می‌خواهد بین مریم و سینا و سارا تقسیم کند. چقدر احتمال دارد تا مریم حداقل چهل سکه داشته باشد، به‌طوری‌که سینا و سارا هم حداقل بیست سکه داشته باشند، ولی سارا بیش از پنجاه سکه نداشته باشد؟

۱۴. در یک کیسه a توپ سفید، b توپ قرمز و c توپ آبی وجود دارد. در هر مرحله یکی از توپ‌ها را به تصادف از سبد خارج می‌کنیم و دور می‌ریزیم؛ و این کار را تا جایی که همه توپ‌های باقی‌مانده در سبد یک‌رنگ باشند ادامه می‌دهیم.

(آ) احتمال اینکه همه توپ‌های باقیمانده در نهایت آبی باشند چقدر است؟

(ب) احتمال اینکه توپ‌های قرمز اولین توپ‌هایی باشند که تمام می‌شوند، چقدر است؟

۱۵. **(مسأله‌ی روز تولد)** فرض کنید کلاسی n دانشجو دارد. مقدار n حداقل چقدر باید باشد تا تاریخ تولد دو دانشجوی کلاس به احتمال ۰٫۸ در یک روز باشد؟ برای سه دانشجو چطور؟ سال را ۳۶۵ روز و نرخ تولد در طول سال را ثابت در نظر می‌گیریم.

۱۶. فرض کنید احتمال انتخاب یک نقطه از بازه‌ی $[0, 1]$ صفر است و همچنین، احتمال اینکه نقطه‌ی انتخاب‌شده در یک بازه‌ی دلخواه بین ۰ تا ۱ بیفتد، برابر طول آن بازه است. (مثلا احتمال اینکه بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ باشد برابر $\frac{1}{6}$ است.) اکنون یک عدد به تصادف بین ۰ و ۱ انتخاب کنید و نمایش آن را در مبنای ۳ در نظر بگیرید. احتمال اینکه در نمایش این عدد در مبنای ۳ رقم ۱ به کار نرفته باشد، چقدر است؟

۱۷. ۱۰۰ مسافر باید سوار هواپیمایی شوند که دقیقاً ۱۰۰ صندلی دارد. به هر بلیط یک صندلی داده می‌شود. مسافر اول بلیط خود را گم کرده است و تصادفاً روی یک صندلی می‌شود. تمام مسافرین بعدی سعی می‌کنند صندلی خود را پیدا کنند و اگر صندلی‌شان پر باشد تصادفاً روی یک صندلی می‌نشینند. احتمال این پیشامد را پیدا کنید که آخرین مسافر روی صندلی خودش بنشیند.

درس احتمال و کاربردها
نیم سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

احتمال شرطی

مدرس: دکتر حمیدرضا فنایی
گردآورندگان:
علی الماسی (دانشگاه صنعتی شریف)
نیوشا نجمایی (دانشگاه پلی‌تکنیک تورین)

۱. متهمی که توسط سه قاضی محاکمه می‌شود، گناهکار اعلام خواهد شد اگر حداقل ۲ نفر رأی به گناهکاری بدهند. فرض کنید وقتی که متهم واقعا مجرم باشد، هر یک از قضات به طور مستقل با احتمال ۰/۷ رأی به گناهکاری او بدهند و اگر واقعا مجرم نباشد، احتمال رأی به گناهکاری توسط هر قاضی به ۰/۲ کاهش یابد. اگر ۷۰ درصد متهمان مجرم باشند، احتمال شرطی اینکه قاضی سوم رأی به گناهکاری بدهد، به شرط هر یک از حالات زیر بدست آورید.

(آ) قاضی اول و دوم رأی به گناهکاری بدهند.

(ب) یکی از دو قاضی اول به گناهکاری و دیگری به بی‌گناهی رأی داده‌اند.

(ج) قاضی اول و دوم هر دو به بی‌گناهی رأی داده‌اند.

(د) اگر E_i پیشامد رأی‌دادن قاضی iام به گناهکاری باشد، آیا این پیشامدها مستقل از همدیگر هستند؟ به طور مشروط چطور، از هم مستقل‌اند؟

۲. (آ) یک خانواده ۴ فرزندی را در نظر بگیرید. نشان دهید پیشامد این که «خانواده هم پسر داشته باشد، هم دختر» از پیشامد «داشتن حداکثر یک فرزند دختر» مستقل نیست.

(ب) تعداد فرزندان به جای ۴ چه عددی باشد تا دو پیشامد گفته‌شده از هم مستقل باشند؟

۳. نشان دهید پیشامد A از همه‌ی پیشامدها مستقل است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$P(A) \in \{0, 1\}$$

۴. دو کیسه در اختیار داریم که کیسه اول دارای ۳ توپ قرمز و ۷ توپ آبی و کیسه‌ی دوم دارای ۶ توپ قرمز و ۴ توپ آبی است. یک کیسه را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و از آن یک توپ برمی‌داریم.

(آ) احتمال آنکه توپ مورد نظر قرمز باشد چقدر است؟

(ب) اگر توپ انتخاب شده قرمز باشد، احتمال آنکه توپ را از کیسه دوم برداشته باشیم چقدر است؟

۵. یک آزمایشگاه تشخیص سرطان با احتمال ۵ درصد برای بیماران غیرسرطانی پاسخ مثبت و با احتمال ۹۹ درصد برای بیماران سرطانی پاسخ مثبت می‌دهد. از بین بیماران یک بیمارستان که ۷ درصد آنها سرطانی هستند یک بیمار را به‌صورت تصادفی انتخاب کرده و آزمایش روی وی مثبت نشان داده شده است. احتمال آنکه بیمار سرطانی باشد چقدر است؟

۶. فرض کنید n سبد داریم که هرکدام شامل a توپ سفید و b توپ مشکی هستند. تصادفاً یک توپ از سبد اول برمی‌داریم و به سبد دوم انتقال می‌دهیم. سپس یک توپ از سبد دوم برمی‌داریم و به سبد سوم انتقال می‌دهیم و این‌کار را تا آخرین سبد ادامه می‌دهیم. حال یک توپ به تصادف از سبد آخر انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این توپ سفید باشد چقدر است؟

۷. در جعبه‌ای شامل ۵ سکه، ۲ سکه سالم (احتمال شیر آمدن یا خط آمدن با هم برابر است)، یک سکه‌ی دوطرف شیر و ۲ سکه‌ی دوطرف خط داریم. سکه‌ای را به تصادف برداشته و پرتاب می‌کنیم.

(آ) احتمال خط آمدن را محاسبه کنید.

(ب) اگر سکه را دوبار پرتاب کنیم، احتمال مشاهده‌ی شیر در پرتاب دوم به شرط مشاهده‌ی شیر در پرتاب اول را بیابید.

۸. n سکه در اختیار داریم که احتمال خط آمدن سکه‌ی iام برابر $\frac{i}{n}$ است. یک سکه را به تصادف انتخاب می‌کنیم و حاصل پرتاب خط می‌شود. احتمال این‌که سکه‌ی پرتاب‌شده سکه‌ی kام باشد ($۱ \leq k \leq n$) چقدر است؟

۹. در جعبه ای $k+۱$ سکه موجود است. برای مقادیر $i = ۰, ۱, \dots, k$، احتمال آمدن شیر در پرتاب کردن iامین سکه‌ی جعبه عبارت است از $\frac{i}{k}$. از جعبه یک سکه را بصورت تصادفی انتخاب کرده و آن را $n+۱$ بار پیاپی پرتاب می‌کنیم. اگر نتیجه تمام n پرتاب اول شیر باشد، احتمال شرطی اینکه نتیجه $n+۱$امین پرتاب نیز شیر باشد چقدر است؟

۱۰. یک آزمایش تصادفی در نظر بگیرید و فرض کنید A و B دو پیشامد ناسازگار در این آزمایش باشند. این آزمایش را به طور متوالی و مستقل از هم اجرا می‌کنیم. نشان دهید احتمال وقوع پیشامد A قبل از پیشامد B برابر است با $\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$.

۱۱. (آ) در سبدی n توپ آبی و m توپ قرمز داریم که $n \geq m$. در هر مرحله به صورت تصادفی یک توپ از سبد خارج می‌کنیم. احتمال این‌که لحظه‌ای وجود داشته باشد که تعداد توپ‌های آبی و قرمز درون سبد یکسان و ناصفر باشد چقدر است؟

(ب) دو بازیکن باهم n بار بازی می‌کنند. در هر بازی احتمال برد و باخت یکسان است. احتمال این که بعد از بازی اول دو بازیکن دیگر هیچ وقت در تعداد برد مساوی نباشند چقدر است؟

۱۲. یک نمایشگاه گربه وجود دارد که در این نمایشگاه هر گربه به احتمال ۰٫۶ سالم است. نوید می‌خواهد یک گربه از این نمایشگاه خریداری کند. او می‌خواهد دوستش رضا که دامپزشک ماهری است را با خود همراه ببرد. رضا در صورتی که گربه بیمار باشد به احتمال ۰٫۹ می‌فهمد و در صورتی که سالم باشد به احتمال ۰٫۲ نمی‌فهمد. دو احتمال زیر را محاسبه کنید.

(آ) گربه سالم باشد به شرط آنکه رضا بگوید گربه بیمار است.

(ب) گربه بیمار باشد به شرط آنکه رضا بگوید گربه سالم است.

۱۳. در یک کیسه r توپ قرمز، b توپ آبی و g توپ سبز قرار دارد. در هر مرحله یک توپ را به تصادف از کیسه خارج کرده و کنار می‌گذاریم. این کار را تا زمانی‌که همه‌ی توپ‌های درون کیسه یک‌رنگ باشند ادامه می‌دهیم.

(آ) احتمال آنکه همه‌ی توپ‌های باقی‌مانده در آخر سبز باشند چقدر است؟

(ب) احتمال آنکه توپ‌های قرمز اولین توپ‌هایی باشند که تمام می‌شوند جقدر است؟

۱۴. چهار تاس در جعبه‌ای وجود دارد. یکی ۴ وجهی، یکی ۶ وجهی و دو تای دیگر ۸ وجهی. (تاس aوجهی اعداد ۱ تا a را با احتمال برابر نشان می‌دهد.) چشم‌هایتان را می‌بندید و یک تاس برمی‌دارید. فرض کنید S تعداد وجه‌های تاس برداشته‌شده باشد. شما می‌توانید تاس را پرتاب کنید و از فردی که کنار شماست عددی که رو آمده است را بپرسید. فرض کنید R عدد رو آمده باشد.

(آ) تابع جرم احتمال R را محاسبه کنید.

(ب) $P(S = k | R = ۳)$ را به ازای $k = ۴, ۶, ۸$ محاسبه کنید.

(ج) اگر عدد رو آمده ۳ باشد به احتمال بیشتر کدام تاس دست ماست؟ اگر ۶ باشد چطور؟

۱۵. (آ) آیا اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، به شرط پیشامد دلخواه C نیز مستقل هستند؟ (یعنی آیا رابطه‌ی $P((A \cap B)|C) = P(A|C)P(B|C)$ برقرار است؟)

(ب) آیا اگر A و B دو پیشامد وابسته باشند، به شرط پیشامد دلخواه C هم وابسته هستند؟ (یعنی آیا رابطه‌ی $P((A \cap B)|C) \neq P(A|C)P(B|C)$ برقرار است؟)

۱۶. سکه‌ای را دوبار پرتاب می‌کنیم. فاطمه ادعا می‌کند که پیشامد آمدن دو شیر به شرطی که بدانیم سکه‌ی اولی شیر است حداقل به اندازه پیشامد آمدن دو شیر به شرطی که بدانیم حداقل یک بار سکه شیر آمده است، محتمل است.

(آ) آیا ادعای فاطمه درست است؟ دلیل بیاورید.

(ب) آیا متقارن‌بودن سکه در درستی این ادعا نقش دارد؟

(ج) چگونه می‌توان ادعای فاطمه را جامعیت بخشید؟

۱۷. در یک بازی فرد شرکت‌کننده به فاصله یک گام از یک دیوار می‌ایستد. پرتاب یک سکه مشخص می‌کند که او باید یک گام به سمت دیوار بردارد یا یک گام در خلاف جهت آن، یعنی اگر سکه رو بیاید شرکت‌کننده یک گام به سمت دیوار برمی‌دارد و اگر پشت بیاید، یک گام در جهت دورشدن از دیوار برمی‌دارد. سکه‌ای که ما داریم اریب است به طوری که احتمال پشت آمدن سکه برابر با $\frac{۳}{۵}$ است. اگر شرط بردن در این بازی رسیدن به دیوار باشد:

(آ) احتمال اینکه شرکت‌کننده با برداشتن ۱ گام برنده شود، چقدر است؟

(ب) احتمال اینکه شرکت‌کننده با برداشتن حداکثر ۳ گام برنده شود را محاسبه کنید.

(ج) احتمال اینکه شرکت‌کننده با برداشتن حداکثر ۵ گام برنده شود را محاسبه کنید.

(د) فرض کنید احتمال پشت آمدن سکه به‌جای $\frac{۳}{۵}$ برابر با p باشد که $۰ < p < ۱$ و

- احتمال برنده‌شدن شرکت‌کننده با شروع بازی از فاصله ۱ گام از دیوار را برابر با $p_۱$ در نظر بگیرید.
- احتمال برنده‌شدن شرکت‌کننده با شروع بازی از فاصله ۲ گام از دیوار را برابر با $p_۲$ در نظر بگیرید.

رابطه‌ای برای محاسبه‌ی $p_۱$ بر حسب p و $p_۲$ بنویسید.
همان‌طور که در قسمت قبل گفته شد $p_۲$ برابر با احتمال برنده‌شدن یک فرد با شروع بازی از فاصله ۲ گام تا دیوار است. برای این‌که شرکت‌کننده با شروع از فاصله ۲ گام تا دیوار برنده شود حتماً ابتدا باید فاصله‌اش از دیوار به ۱ گام برسد و سپس از فاصله ۱ گام تا دیوار به دیوار برسد. با استفاده از این مطلب احتمال $p_۲$ را برحسب $p_۱$ بنویسید.

(ه) با استفاده از نتیجه قسمت قبل، رابطه به دست آمده در قسمت ۴ را بازنویسی کنید.

۱۸. درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

(آ) اگر

$$P(A|C) \geq P(A|C^c)$$

و

$$P(B|C) \geq P(B|C^c)$$

باشد، در این‌صورت

$$P(A \cap B|C) \geq P(A \cap B|C^c)$$

(ب) اگر A_n دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل و $\sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n) = \infty$ باشد، آن‌گاه

$$P(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n) = ۱$$

۱۹. (آ) فرض کنید $x, l \in \mathbb{N}$ و $0 \leq x \leq l$ باشند. متحرکی از نقطه‌ی x شروع به حرکت می‌کند و در هر گام مستقل از گام‌های قبل به اندازه‌ی یک واحد با احتمال برابر به راست یا چپ حرکت می‌کند. احتمال این‌که متحرک قبل از این که به نقطه‌ی صفر برسد، به نقطه‌ی l برسد چقدر است؟

(ب) احتمال این که متحرک قسمت قبل بالاخره بعد از مدتی دوباره به نقطه‌ی شروع حرکت برسد چقدر است؟

۲۰. قدم‌زنی تصادفی روی $\mathbb{Z}$ حرکت خود را از مبدا آغاز می‌کند و در هر گام به احتمال برابر به یکی از اعداد مجاور خود می‌رود. می‌دانیم او به احتمال یک به مبدا برخواهد گشت. فرض کنید $n \in \mathbb{Z}$.

(آ) به چه احتمالی قبل از بازگشت به مبدأ حداقل دوبار به n می‌رسد؟

(ب) به چه احتمالی قبل از بازگشت به مبدأ دقیقاً دوبار به n می‌رسد؟

۲۱. فرض کنید به طور مداوم با حریفی بی‌نهایت پولدار بازی می‌کنید. در هر بازی یا یک سکه می‌برید یا یک سکه می‌بازید. اگر هر بازی را مستقلا با احتمال p ببرید، نشان دهید اگر $p \leq \frac{1}{2}$ با احتمال ۱ سرانجام ورشکست خواهید شد و اگر $p > \frac{1}{2}$ احتمال آن $(\frac{1-p}{p})^k$ خواهد بود که k میزان پول شما در ابتدای بازی است.

۲۲. (آ) دو متحرک روی محور x از نقطه‌ی $x = 0$ شروع به حرکت می‌کنند. دو متحرک باهم گام برمی‌دارند و حرکت آن‌دو از یکدیگر مستقل است. (در هنگام برخورد از یکدیگر رد می‌شوند.) و هر یک در هر گام به اندازه‌ی یک واحد با احتمال یکسان به راست یا چپ حرکت می‌کنند. احتمال این‌که بعد از n قدم این دو متحرک در محل یکسانی باشند چقدر است؟

(ب) دو متحرک در صفحه‌ی دو بعدی از مبدا مختصات شروع به حرکت می‌کنند. دو متحرک هم‌زمان گام برمی‌دارند و در هر گام به اندازه‌ی یک واحد با احتمال یکسان در یکی از جهت‌های راست، چپ، بالا و یا پایین حرکت می‌کنند. احتمال این‌که پس از n گام دو متحرک در محل یکسانی باشند چقدر است؟

۲۳. یک قدم‌زن تصادفی درون بازه‌ی $[A, B]$ از اعداد صحیح در حال حرکت است به طوری که در هر بار حرکت با احتمال برابر به چپ یا راست می‌رود و این کار را تا زمانی انجام می‌دهد که به یکی از دو سر بازه برسد. ثابت کنید اگر حرکت خود را از نقطه C، $(A \leq C \leq B)$ شروع کند که فاصله‌ی آن با A برابر a و با B برابر b است آنگاه احتمال آن‌که در B متوقف شود برابر $\frac{a}{a+b}$ است.

۲۴. روشی ارائه دهید که بتوانیم با استفاده از یک سکه‌ی ناسالم که با احتمال p شیر می‌آید، بین دو نفر یکی را به‌صورت تصادفی انتخاب کنیم.

۲۵. ۱۰ توپ قرمز و ۱۰ توپ سبز و ۱۰ کیسه داریم. توپ‌ها را به‌صورت تصادفی درون کیسه‌ها قرار می‌دهیم به طوری‌که هر کیسه شامل دقیقاً دو توپ باشد. احتمال آن‌که دقیقاً k کیسه شامل توپ‌های با رنگ متفاوت باشند را بیابید.

۲۶. می‌گوییم رویداد F حاوی اطلاعات منفی درباره‌ی رویداد E است و می‌نویسیم $F \searrow E$ اگر داشته باشیم $P(E|F) \leq P(E)$. عبارات زیر را ثابت کنید یا برایشان مثال نقض بیاورید.

(آ) اگر $F \searrow E$ آن‌گاه $E \searrow F$.

(ب) اگر $F \searrow E$ و $H \searrow F$ آن‌گاه $H \searrow E$.

(ج) اگر $F \searrow E$ و $F \searrow H$ آن‌گاه $F \searrow E \cap H$.

۲۷. جعبه ۱ شامل ۱۰۰۰ لامپ است که ۱۰ درصد آن ها خراب هستند. جعبه ۲ شامل ۲۰۰۰ لامپ است که ۵ درصد آن ها خراب هستند. جعبه ای به تصادف انتخاب شده و دو لامپ از آن خارج می‌شود.

(آ) به چه احتمالی هر دو لامپ خراب هستند؟

(ب) با فرض اینکه هر دو لامپ خراب باشند، اختمال اینکه لامپ ها از حعبه اول انتخاب شده باشند چقدر است؟

۲۸. فرض کنید $n > 1$ عدد صحیح باشد. اعداد $0, 1, \ldots, n$ روی یک دایره چیده شده‌اند. یک قدم‌زن تصادفی از ۰ شروع کرده و در هر قدم به یکی از دو عدد مجاور می‌رود. برای هر i احتمال p_i را پیدا کنید که وقتی قدم‌زن برای اولین بار در i قرار گرفته است،تمام بقیه نقاط قبلاً بازدید شده باشند، یعنی i آخرین نقطه ای باشد که برای اولین بار بازدید می‌شود. به طور مثال $p_0 = 0$.

۲۹. سه بازیکن وارد اتاقی می‌شوند و کلاهی قرمز یا آبی روی سر هر کدام از آن‌ها قرار می‌گیرد. رنگ هر کلاه مستقلاً و با انداختن یک سکه تعیین می‌شود. بجز یک جلسه تعیین استراتژی قبل از اینکه بازی شروع شود هیچ‌گونه ارتباطی بین افراد ممکن نیست. هنگامی که تمام بازیکنان رنگ کلاه همه بازیکنان بجز خودشان را دیدند، بازیکنان باید به طور همزمان رنگ کلاه خودشان را حدس بزنند و یا آن نوبت را بازی نکنند. استراتژی گروهی را بیابید که احتمال این پیشامد را بیشینه کند که حداقل یک نفر رنگ کلاهش را به درستی حدس بزند و هیچ کس حدس اشتباهی نداشته باشد.

۳۰. شخص قماربازی از پاسکال پرسید احتمال کدام پیشامد بیشتر است؛ اینکه حداقل یک شش در ۴ پرتاب تاس بیاید یا اینکه حداقل یک جفت شش در ۲۴ بار پرتاب یک زوج تاس بیاید. با تعمیم این سوال، فرض کنید n تاس سالم $4 \times 6^{n-1}$ بار پرتاب شوند.

(آ) امید ریاضی تعداد دفعاتی همه n تاس به طور همزمان ۶ بیایند.

(ب) یک تخمین ساده اما خوب برای احتمال اینکه حداقل یک بار همه تاس ها به طور همزمان ۶ بیایند با فرض اینکه n بزرگ باشد، ارائه دهید. (برحسب e و نه n)

(ج) قمارباز از این همه تاس ریختن خسته شده است پس بعد از ریختن n تاس، به احتمال $\frac{1}{7}$ دوباره n تاس را پرتاب می‌کند و با احتمال $\frac{6}{7}$ تاس ها را به همان صورت رها می‌کند. به طور مثال اگر $n = 3$ باشد و هفتمین پرتاب $(4, 1, 3)$ باشد، با احتمال $\frac{6}{7}$ نتیجه پرتاب هشتم همان $(4, 1, 3)$ باقی می‌ماند و با احتمال $\frac{1}{7}$ نتیجه تصادفی دیگری خواهیم داشت. آیا امید ریاضی تعداد دفعاتی که همه تاس‌ها به صورت همزمان ۶ می‌آیند ثابت می‌ماند، زیاد می‌شود یا کاهش می‌یابد؟ (با جواب قسمت آ مقایسه کنید.)

۳۱. یک بخت‌آزمایی به این صورت برگذار می‌شود که در هر روز از این بخت‌آزمایی، ۵ عدد صحیح بدون جایگذاری از ۱ تا ۳۵ انتخاب می‌شوند.

(آ) احتمال اینکه دقیقا سه عدد درست حدس زده شود، به شرط اینکه حداقل ۱ عدد درست حدس زده شده باشد را بیابید

(ب) امید ریاضی تعداد روزهایی که نیاز است برای اینکه تمام $\binom{35}{5}$ نتیجه ممکن بخت‌آزمایی اتفاق بیفتند را بیابید.

(ج) احتمال اینکه پس از ۵۰ روز تمام اعداد از ۱ تا ۳۵ حداقل یک بار انتخاب شده باشند را تخمین بزنید.

درس احتمال و کاربردها
نیم سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

متغیرهای تصادفی پیوسته، توزیع توام

مدرس: دکتر حمیدرضا فنایی

گردآورندگان:

علی الماسی (دانشگاه صنعتی شریف)

نیوشا نجمایی (دانشگاه پلی‌تکنیک تورین)

---

۱. ۲۰۲۱ نقطه به تصادف، مستقلاً و به طور یکنواخت روی دیسک واحد

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2} : x^{2} + y^{2} \leq 1\}$$

انتخاب می‌شوند. فرض کنید C پوش محدب نقاط انتخاب شده باشد. احتمال کدام یک از پیشامدهای زیر بیشتر است؟

(آ) C یک سه‌ضلعی باشد.

(ب) C یک چهارضلعی باشد.

۲. X, Y, Z متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامترهای به‌ترتیب α، β و γ هستند. مقدار $P(X < Y < Z)$ را محاسبه کنید.

۳. X و Y دو متغیر تصادفی نمایی مستقل از هم با پارامتر ۱ هستند. تابع توزیع توام $U = X + Y$ و $V = \frac{X}{X+Y}$ را بیابید و نتیجه بگیرید که V توزیع یکنواخت در $[0, 1]$ دارد.

۴. یک تکه چوب به طول ۱ داریم. دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 را به‌صورت یکنواخت از $[0, 1]$ انتخاب می‌کنیم. تکه چوب را در محل‌های X_1 و X_2 برش می‌دهیم. چقدر احتمال دارد که سه تکه‌ی حاصل‌شده، تشکیل مثلث دهند؟

۵. X یک متغیر تصادفی پیوسته و g یک تابع انتگرال‌پذیر است.

(آ) نشان دهید:

$$E[X] = \int_{0}^{\infty} P(X > x)dx - \int_{0}^{\infty} P(X < -x)dx$$

(ب) نشان دهید: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f_X(x)dx$

۶. نقطه‌ای تصادفی به‌صورت زیر از دایره‌ی واحد به مبدا مرکز مختصات انتخاب می‌کنیم.
ابتدا یک زاویه با اندازه‌ی $\theta \in [0, 2\pi]$ به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. (راس آن مبدا مختصات، یک ضلع آن جهت مثبت محور xها و ضلع دیگر آن در جهت پادساعتگرد انتخاب می‌شود.) سپس یک پاره‌خط (که یک سر آن مبدا مختصات است) به‌طول $r \in [0, 1]$ به‌طور کاملا تصادفی و مستقل از θ بر روی ضلع دوم جدا می‌کنیم. نقطه‌ی انتخابی سر دیگرِ پاره‌خط است.
چگالی احتمال توام طول و عرض نقطه‌ی انتخاب‌شده را بیابید و توزیع‌های حاشیه‌ای را محاسبه کنید.

۷. شخصی خانه‌ی خود را برای فروش گذاشته است و تصمیم گرفته اولین پیشنهاد خرید بیشتر از K را بپذیرد. با فرض این‌که پیشنهادهای خرید، متغیرهای تصادفی با توزیع یکسان F باشند، امید تعداد پیشنهادها قبل از به فروش رفتن خانه را بیابید.

۸. یک شبکه از خطوط افقی و عمودی داریم. فاصله‌ی خطوط عمودی و افقی از هم به‌ترتیب a و b است. یک سوزن به‌طول $r < (min\,[a, b])$ را به‌طور تصادفی روی شبکه می‌اندازیم. نشان دهید احتمال این‌که سوزن یک خط را قطع کند $\frac{r(2a+2b-r)}{\pi ab}$ است.

۹. فرض کنید U یک متغیر تصادفی یکنواخت $[0, 1]$ باشد. روشی برای تولید نمونه‌ای از متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ از روی متغیر تصادفی U ارائه دهید.

۱۰. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامترهای α و β باشند.

(آ) چگالی احتمال $X + Y$ را بیابید.

(ب) چگالی احتمال $Z = min(X, Y)$ را بیابید.

(ج) آیا Z و $1_{(X<Y)}$ مستقل‌اند؟

۱۱. در صف تولیدی طول عمر یک بازوی مکانیکی با یک سنسور خاص اندازه‌گیری می‌شود. این سنسور در هر ثانیه یک بار بررسی می‌کند که بازوی مکانیکی کار می‌کند یا نه. اگر بازوی مکانیکی کار نکند، سنسور زمان خراب شدن بازو را با استفاده از تابع سقف اعلام میکند. یعنی اگر اندازه‌گیری در زمان x انجام شود، سنسور $\lceil x \rceil$ را به عنوان زمان خراب شدن دستگاه اعلام می‌کند. T زمان گزارش شده توسط سنسور است.

(آ) تابع چگالی احتمال T را پیدا کنید.

(ب) امید ریاضی T را پیدا کنید.

۱۲. (آ) X یک متغیر تصادفی یکنواخت بین $(0, A)$ است $(A < \infty)$. a چقدر باشد تا مقدار $E\,[|X - a|]$ حداقل شود.

(ب) بخش قبل را به ازای اینکه X متغیر تصادفی نمایی با پارامتر باشد حل کنید.

۱۳. سه نقطه به تصادف و مستقل از هم بر روی محیط یک دایره انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این سه نقطه تشکیل یک مثلث با زوایای حاده بدهند؟

۱۴. فرض کنید متغیرهای $X_1, X_2, \ldots$ متغیرهای تصادفی تواماً مستقل و نمایی با پارامتر λ باشند. برای $t > 0$ تعریف کنید:

$$N(t) = max\,\{n : X_1 + \cdots + X_n \leq t\}$$

در صورتی که $X_1 > t$، قرار دهید $N(t) = 0$. در نتیجه برای هر $t > 0$، $N(t)$ یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح نامنفی است. نشان دهید: $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$.

۱۵. (آ) ۳ نقطه X_1 و X_2 و X_3 به‌صورت تصادفی روی یک خط انتخاب می‌شوند. احتمال این‌که X_2 بین X_1 و X_3 قرار گیرد چقدر است؟

(ب) بر روی یک دایره به شعاع R یک نقطه با توزیع $f_\theta(\theta) = a + b\cos(\frac{\theta}{2})$ انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که امید ریاضی θ، $\frac{\pi}{2}$ شود. a و b را به‌دست آورید.

(ج) فاصله‌ی نقطه را با نقطه‌ی $\theta = 0$ روی دایره با r نمایش می‌دهیم. $f_r(r)$ را به‌دست آورید.

(د) $E\,[r]$ را به‌دست آورید.

(ه) $Var\,[r]$ را به‌دست آورید.

۱۶. دو عدد حقیقی x و y به طور تصادفی و یکنواخت در بازه $(0, 1)$ انتخاب می‌شوند. احتمال این که نزدیک‌ترین عدد صحیح به $\frac{x}{y}$ زوج باشد چقدر است؟ جواب را به صورت $r + s\pi$ بنویسید. r و s اعداد گویا هستند.

۱۷. فرض کنید $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$ و $k \in \mathbb{N}$. احتمال این‌که فاصله‌ی X از میانگینش بیش از $k\sigma$ باشد را بر حسب ϕ محاسبه کنید. سپس به کمک جدول توزیع‌های نرمال، کوچک‌ترین kای را بیابید که احتمال مذکور از یک‌درصد کمتر باشد.

۱۸. تابع چگالی توام X و Y به‌شکل زیر داده شده‌است.

$$f_{x,y} = \frac{۱}{x^۲ y^۲} \qquad x, y \geq ۱$$

(آ) تابع چگالی توام $U = XY$ و $V = \frac{X}{Y}$ را محاسبه کنید.

(ب) توزیع حاشیه‌ای U و V را حساب کنید.

۱۹. می‌خواهیم حرکت ولگرد تصادفی را در فضای پیوسته بررسی کنیم.
احتمال این‌که ذره در زمان t در بازه‌ی $(X, X + dX)$ باشد را با $P(t, X)dX$ نمایش می‌دهیم.
فرض کنید طول قدم‌های ذره ΔX (که به سمت صفر میل می‌کند) باشد و این حرکت Δt طول بکشد به‌طوری‌که $\frac{\Delta X^۲}{\Delta t}$ ثابت باشد.
همچنین فرض کنید ذره به احتمال $\frac{۱}{۲}$ به راست و با همین احتمال به چپ می‌رود.

(آ) رابطه‌ی بازگشتی‌ای برای $P(t, X)$ بنویسید.

(ب) با استفاده از بسط تیلور این تابع نشان دهید که:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^۲ P}{\partial X^۲}$$

که در آن D یک مقدار ثابت است.

(ج) فرض کنید ذره از مبدا شروع به حرکت کرده است. فقط با استفاده از رابطه‌ی فوق $E\left[X^۲\right]$ را به‌دست آورید.

(د) یک رابطه‌ی گاوسی برای $P(t, X)$ حدس بزنید و نشان دهید این توزیع در رابطه‌ی قسمت دوم صدق می‌کند.

۲۰. ابتدا n متغیر تصادفی $i.i.d$ با توزیع یکنواخت روی بازه‌ی ۰ تا ۱ تولید می‌کنیم و سپس آن‌ها را به‌صورت

$$X_{(۱)} \leq X_{(۲)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$$

مرتب می‌کنیم. ثابت کنید برای $۱ \leq k \leq n + ۱$ داریم:

$$P(X_{(k)} - X_{(k-۱)} > t) = (۱ - t)^n$$

که $X_{(n+۱)} \equiv ۱$ و $X_{(۰)} \equiv ۰$ است.

۲۱. اگر $X_۱$ و $X_۲$ دو متغیر تصادفی مستقل نمایی با پارامترهای $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ باشند، توزیع $Z = \frac{X_۱}{X_۲}$ را بیابید و مقدار $P(X_۱ < X_۲)$ را محاسبه کنید.

۲۲. فرض کنید درون یک ظرف N ذره داریم که میانگین انرژی هر کدام از ذرات $E_۰$ است و داریم $E = \frac{۱}{۲}mv^۲$ (که E انرژی ذره، m جرم ذره که برای همه ذرات ثابت در نظر گرفته شده و v اندازه‌ی سرعت ذرات است.) توزیع سرعت ذرات در هر کدام از مولفه‌های x و y و z (v_x, v_y, v_z)، مستقل و گاوسی (با واریانس یکسان) است. میانگین سرعت در هر کدام از راستاها صفر است. اندازه‌ی سرعت هر ذره را با v نمایش می‌دهیم و داریم: $v^۲ = v_x^۲ + v_y^۲ + v_z^۲$. تابع توزیع اندازه سرعت ذرات را به دست آورید.

۲۳. فرض کنید ذره‌ای از مبدا مختصات شروع به حرکت می‌کند. طول هر گام $l_۰$ است و جهت آن در فضای سه‌بعدی تصادفی است. بعد از N قدم:

(آ) میانگین بردار فاصله را به‌دست آورید؟

(ب) مقدار $E\left[r^{2}\right]$ را به‌دست آورید (که r فاصله تا مبدا مختصات است.)

۲۴. تابع چگالی توام دو متغیر تصادفی X و Y برای $X,Y > 0$ به‌صورت $f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}$ و در غیر این‌صورت برابر صفر تعریف شده است. تابع چگالی متغیر تصادفی $X+Y$ چیست؟

۲۵. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نرمال استاندارد مستقل از هم باشند. یک دایره به مرکز مبدا O را در نظر بگیرید که از نقطه‌ی M به مختصات (X,Y) می‌گذرد به‌طوری‌که OM شعاعی از دایره است. تابع چگالی احتمال مساحت این دایره را به‌دست آورید.

۲۶. عدد X را از توزیع هندسی با پارامتر $\frac{1}{2}$ می‌گیریم. سپس سکه‌ای با پارامتر $\frac{1}{X+1}$ برای شیر را آنقدر می‌اندازیم تا برای سومین‌بار شیر بیاید. تابع جرم احتمال برای این تعداد و میانگین و واریانس آن را محاسبه کنید.

۲۷. فرض کنید $Z \sim N(0,1)$. ثابت کنید برای هر $x \geq 0$ داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{x}{x^{2}+1}e^{-\frac{x^{2}}{2}} \leq P(Z \geq x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-\frac{x^{2}}{2}}$$

۲۸. فرض کنید $X \sim Gamma(a,\lambda)$، که $a,\lambda > 0$. $E[X]$ و $Var(X)$ را حساب کنید.

۲۹. چهار نقطه به طور یکنواخت و مستقل به طور تصادفی درون یک دایره انتخاب شده‌اند. احتمال این که این ۴ نقطه رئوس یک چهارضلعی محدب باشند را بیابید.

۳۰. (آ) فرض کنید $X_{1}, X_{2}, \ldots$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم با توزیع احتمال $N(0,4)$ باشند و J کوچکترین مقدار j باشد که $X_{j} > 4$. $E(J)$ را بر حسب Φ بیابید.

(ب) فرض کنید f و g توابع توزیع احتمال باشند که برای همه xها $f(x) > 0$ و $g(x) > 0$. فرض کنید X متغیر تصادفی با تابع چگالی f باشد. امید ریاضی $R = \frac{g(X)}{f(X)}$ بدست آورید.

(ج) فرض کنید متغیر تصادفی X تابع توزیع تجمعی $F(x) = e^{-e^{-x}}$ داشته باشد. F تابعی پیوسته و اکیداً صعودی است. میانگین و واریانس $W = F(X)$ را بدست آورید.

۳۱. توزیع ارلانگ و نمایی حالات خاص توزیع گاما هستند.

$$\mathbf{X} \sim Gamma(r,\lambda) \qquad f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{\lambda^{r}x^{r-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)} \quad x \geq 0$$

که $\Gamma(r) = \int_{0}^{\infty} t^{r-1}e^{-t}dt$ است.

توزیع گاما با $r = 1$ معادل توزیع نمایی است و با $r = n \quad (n \in \mathbb{N})$ معادل توزیع ارلانگ است.

$$\mathbf{X} \sim Gamma(1,\lambda) \Rightarrow \mathbf{X} \sim Exponential(\lambda) \qquad f_{\mathbf{X}}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

$$\mathbf{X} \sim Gamma(n,\lambda) \Rightarrow \mathbf{X} \sim Erlang(n,\lambda) \quad f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{\lambda^{n}e^{n-1}e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \quad x \geq 0$$

(آ) فرض کنید تعداد تماس های دریافتی در هر بازه زمانی توزیع پواسون با پارامتر λ داشته باشد. ثابت کنید که زمان انتظار قبل از تماس اول توزیع نمایی داشته باشد. (از تابع توزیع تجمعی استفاده کنید.)

(ب) مانند قسمت قبل، با استفاده از تابع توزیع تجمعی ثابت کنید که زمان انتظار برای Nمین تماس توزیع ارلانگ دارد. $(Erlang(N,\lambda))$

۳۲. چهار نقطه به طور تصادفی، مستقل و یکنواخت روی سطح یک کره انتخاب می‌شوند. احتمال این که مرکز کره داخل چهاروجهی که رئوس آن نقاط انتخاب شده باشند، چقدر است؟

۳۳. فرض کنید $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نقطه‌ای باشد که از یک فضای n بعدی $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ به طور تصادفی انتخاب می‌شود. فرض کنید f تابعی پیوسته روی بازه $[0, 1]$ باشد و $f(1) = 0$. اگر $x_0 = 0$ و $x_{n+1} = 1$ باشند. نشان دهید امید ریاضی مجموع ریمان

$$\Sigma_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i)f(x_{i+1})$$

برابر $\int_0^1 f(t)P(t)dt$ است که P چندجمله‌ای از درجه n، مستقل از f است که برای همه $0 \leq t \leq 1$ داریم $0 \leq P(t) \leq 1$.

۳۴. فرض کنید که دو متغیر تصادفی (X, Y) توزیع مشترک زیر را داشته باشند:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-Q(x,y)}{2(1-\rho^2)}}$$

که در آن $Q(x, y) = x^2 + (y - \rho x)^2 - \rho^2 x^2$ است. احتمال $P(Y > X > 0)$ را محاسبه کنید.

۳۵. (آ) ثابت کنید تنها توزیع پیوسته‌ی بی‌حافظه توزیع نمایی است.

(ب) فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی باشند با پارامتر λ. توزیع متغیر تصادفی $Y = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ را به‌دست آورید.

(ج) چراغ‌قوه‌ای داریم که به آن n باتری وصل کرده‌ایم. عمر هر باتری توزیع نمایی با پارامتر λ است. تا زمانی که همه باتری‌ها خراب نشده‌اند چراغ‌قوه کار می‌کند. امید ریاضی زمان کارکرد چراغ‌قوه را به‌دست آورید.

۳۶. تابع چگالی متغیر تصادفی X به این‌صورت تعریف شده است که در بازه‌ی $[0, 1]$، $x \in$، $f_X(x) = a + bx^2$ و در خارج این بازه مقدارش صفر است. اگر امید X برابر $\frac{3}{5}$ باشد، مقدار a و b را محاسبه کنید.

درس احتمال و کاربردها
نیم سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

متغیر تصادفی، امید ریاضی، واریانس، متغیرهای تصادفی گسسته، استقلال متغیرهای تصادفی

مدرس: دکتر حمیدرضا فنایی

گردآورندگان:

علی الماسی (دانشگاه صنعتی شریف)

نیوشا نجمایی (دانشگاه پلی‌تکنیک تورین)

---

۱. بازی زیر را در نظر بگیرید:
یک تاس سالم یک بار پرتاب می‌شود و بازیکن می‌تواند بازی را تمام کرده و مقداری پول به اندازه عدد ظاهر شده دریافت کند یا می‌تواند به بازی ادامه داده، باری دیگر تاس بریزد و به اندازه عدد ظاهر شده در پرتاب دوم پول دریافت کند.
امیدریاضی سود ماکسیمال محاسبه کرده و استراتژی مناسب برای آن را ارائه دهید.

۲. متغیر تصادفی $\mathbf{X}$ با توزیع هندسی و متغیر $\mathbf{Y}$ را که به‌صورت زیر تعریف شده است در نظر بگیرید.

$$\mathbf{Y} = -log_{۲}(P\{\mathbf{X} = k\})$$

باشد. می‌دانیم که $P\{\mathbf{X} = k\} = pq^{k-۱}$ امید ریاضی $\mathbf{Y}$ را بدست آورید.

۳. فرض کنید به مهمانی‌ای ۵۰۰ نفره دعوت شده‌اید. احتمال اینکه دقیقاً یک مهمان دیگر روز تولدش مانند شما باشد چقدر است؟ این احتمال را هم به‌صورت دقیق و هم با استفاده از توزیع پواسون به طور تقریبی محاسبه کرده و نتایج را مقایسه کنید.

۴. از یک چهارراه در ساعت به طور متوسط ۳۰۰ ماشین عبور می‌کند.

(آ) احتمال این‌که در یک دقیقه‌ی خاص هیچ ماشینی از چهارراه عبور نکند چقدر است؟

(ب) امید ریاضی تعداد ماشین‌هایی که از چهارراه در دو دقیقه عبور می‌کنند چقدر است؟

(ج) احتمال این‌که دقیقا همین تعداد ماشین که در قسمت قبل به‌دست آوردید در دو دقیقه از چهارراه عبور کنند چقدر است؟

۵. ثابت کنید X متغیر تصادفی با توزیع هندسی است اگر

$$P(X > m + n | X > n) = P(X > m)$$

۶. اگر X یک متغیر تصادفی باشد تابع مولد آن، $M_X(t)$ را برابر $E\left[e^{tX}\right]$ تعریف می‌کنیم. حال نشان دهید اگر X متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی با پارامتر (r, p) باشد آن‌گاه

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{۱ - (۱ - p)e^t}\right)^r$$

۷. ثابت کنید اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند داریم:

$$E\left[X^۲\right] E\left[Y^۲\right] \geq (E\left[XY\right])^۲$$

۸. فرض کنید X, Y دو متغیر تصادفی گسسته مستقل باشند. آیا لزوما $X^۲$ و $Y^۲$ مستقل هستند؟

۹. فرض کنید S_k مجموعه اعداد k رقمی در مبنای ۱۰ باشد. متغیر تصادفی N را به این‌صورت انتخاب می‌کنیم:
یک سکه‌ی سالم را تا جایی که شیر بیاید پرتاب می کنیم. اگر تعداد پرتاب‌ها تا آمدن شیر T باشد، N را به احتمال یکسان از مجموعه S_T انتخاب می‌کنیم.
تابع جرم احتمال متغیر تصادفی N را محاسبه کنید.

۱۰. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ باشد. برای هر n طبیعی ثابت کنید:

$$E\left[X^n\right] = \lambda E\left[(X+1)^{n-1}\right]$$

و به کمک آن مقدار $E\left[X^3\right]$ را محاسبه کنید.

۱۱. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی هندسی مستقل با پارامترهای p و q باشند. احتمال پیشامد $X < Y$ را محاسبه کنید.

۱۲. یک جعبه حاوی ۹ توپ قرمز و ۱۶ توپ آبی در اختیار داریم. ۷ توپ از جعبه برمی‌داریم، اگر تعداد آبی‌هایی که برداشته‌شده بیشتر بود، ۱ سکه می‌بریم، در غیر این صورت ۱ سکه می بازیم. امید ریاضی و واریانس تغییر پولمان بعد از یک‌بار بازی‌کردن را حساب کنید.

۱۳. واریانس و امید ریاضی متغیرهای تصادفی دوجمله‌ای منفی و فوق‌هندسی را به طور پارامتری محاسبه کنید.

۱۴. اعداد ۱ تا n در یک سطر و در جهت نزولی از چپ به راست کنار هم چیده شده‌اند. مادامی‌که اعداد به ترتیب صعودی مرتب نشده‌اند، در هر ثانیه یک جفت از اعداد به طور تصادفی و یکنواخت انتخاب می‌شوند و در صورتی‌که عدد سمت چپی از راستی بزرگتر بود، آن دو عدد با هم جابه‌جا می‌شوند.

(آ) برای $n = 4$ با این فرض که جفت عددها فقط از بین جفت‌هایی انتخاب می‌شوند که سمت چپی از راستی بزرگتر است، امید تعداد ثانیه‌های لازم برای مرتب‌شدن را محاسبه کنید.

(ب) برای $n = 4$ بدون فرض قسمت قبل، خواسته‌ی مساله را محاسبه کنید.

(ج) در حالت کلی توزیع زمان پایان این فرآیند را محاسبه کنید. (سعی کنید الگوریتمی با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای ارائه دهید!)

۱۵. فرض کنید G گروهی آبلی با n عضو باشد و داشته باشیم

$$\{g_1 = e, g_2, \dots, g_k\} \subseteq G$$

مجموعه (نه لزوماً مینیمال) از مولدهای متمایز G باشد. یک تاس خاص که به طور تصادفی یکی از این مولد ها را با احتمال یکسان انتخاب می‌کند، m بار انداخته می‌شود و اعضای انتخاب شده در هم ضرب می‌شوند تا یک عضو $g \in G$ را تولید کنند.
ثابت کنید عدد حقیقی $b \in (0, 1)$ وجود دارد به طوری که

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{b^{2m}} \Sigma_{x\in G} \Big(Prob(g = x) - \frac{1}{n}\Big)^2$$

مثبت و متناهی است.

۱۶. مردی در مبدأ مختصات ایستاده است. او در هر قدم دو سکه سالم می‌اندازد. اگر هر دو سکه شیر بیایند، به سمت شمال، اگر اولی شیر و دومی خط بیاید به سمت جنوب، اگر هر دو خط بیایند به سمت شرق و اگر اولی خط و دومی شیر بیاید به سمت غرب حرکت می‌کند.
فرض کنید D_n متفیر تصادفی باشد که مجذور فاصله‌اش تا مبدأ پس از n قدم را نشان می‌دهد.

(آ) امید ریاضی D_n را برای $n = 1$ پیدا کنید.

(ب) واریانس D_n را برای $n = 1$ پیدا کنید.

(ج) واریانس و امید ریاضی D_n را بر حسب n بیابید.

۱۷. ۸۰۰۰۰ ازدواج در سال گذشته در شکرستان ثبت شده است. تخمینی از احتمال پیشامدهای زیر ارائه دهید.

(آ) زوجی وجود داشته باشد که زن و شوهر هر دو در روز ۲۹ فروردین به دنیا آمده باشند.

(ب) حداقل سه زوج وجود داشته باشد که در هرکدام زن و شوهر در یک روز از سال به دنیا آمده باشند.

۱۸. فرض کنید X و Y دو متغیر مستقل پواسون با پارامتر های a و b باشند.

(آ) توزیع $X+Y$ را به‌دست آورید.

(ب) توزیع متغیر X را به شرط $X+Y=n$ به‌دست آورید.

(ج) توزیع $X-Y$ را به‌دست آورید.

(د) توزیع متغیر X به شرط $X-Y=n$ را به دست آورید.

۱۹. قطاری با ظرفیت ۱۰۰۰ مسافر عازم مشهد است. شرکت مسافرتی کل ظرفیت قطار را رزرو کرده است و به طور خرد به مسافران بلیط می‌فروشد. قیمت هر بلیط ۱ میلیون تومان است. هرکدام از کسانی که بلیط می‌خرند با احتمال ۰٫۰۵ نمی‌توانند در روز سفر خود را به قطار برسانند. شرکت با پیداکردن این فرصت می‌خواهد بیش از ظرفیت قطار بلیط بفروشد تا سود بیشتری کسب کند. طبق قانون چنان‌چه برای مسافری که به او بلیط فروخته شده و او خود را به قطار رسانده است، جایی در قطار وجود نداشته باشد، شرکت ملزم است $k>1$ برابر قیمت بلیط را به مسافر بازگرداند.
فرض کنید امید سود شرکت از فروش n عدد بلیط بیش از ظرفیت، $R_k(n)$ باشد و nای که این تابع را بیشینه می‌کند و در محدوده‌ی ۰ تا ۱۰۰۰ است، $I(k)$ باشد.

(آ) به ازای $k=1,2$ مقادیر $I(k)$ و $R_k(I_k)$ را محاسبه کنید.

(ب) به ازای چه حداقل مقداری برای k شرکت بلیط‌فروشی نمی‌تواند با فروش بلیط اضافی به‌طور میانگین سود کسب کند؟

(ج) مقادیر $I(k)$ و $R_k(I_k)$ را برای مقدار پارامتری k محاسبه کنید.

۲۰. برای دو متغیر تصادفی مستقل مانند X و Y نشان دهید:

$$E[XY]=E[X]\,E[Y]$$

۲۱. پلیس شهر برای خنثی‌کردن یک بمب باید رمز nرقمی آن را پیدا کند. بمب دارای یک نمایشگر دیجیتال و یک صفحه کلید می‌باشد. آقا پلیسه در هر مرحله یک عدد nرقمی (این عدد می‌تواند با رقم ۰ آغاز شود). مثل $d_1d_2d_3\ldots d_n$ را از طریق صفحه‌کلید وارد کرده و $Enter$ را می‌زند. پس از فشردن $Enter$ اگر رقم iاُم رمز بمب برابر با d_i بود، جایگاه iاُم نمایشگر سبز وگرنه قرمز می‌شود. اگر همه‌ی جایگاه‌ها سبز بود، رمز پیدا شده و بمب خنثی می‌شود وگرنه آقا پلیسه باید عدد nرقمی دیگری را امتحان کند.
می‌دانیم آقا پلیسه باهوش است و اگر در مرحله‌ای متوجه شود رقم iاُم رمز بمب برابر با x می‌باشد، در تمام مراحل بعد، رقم iاُم عددی که وارد می‌کند را x قرار می‌دهد و اگر متوجه شود رقم iاُم رمز بمب برابر با x نیست، از آن پس از x به عنوان رقم iاُم عدد ورودی استفاده نمی‌کند.
واضح است که آقا پلیسه پس از حدّاکثر ۱۰ مرحله می‌تواند بمب را خنثی کند.

(آ) اگر X تعداد مراحل تا خنثی‌شدن بمب باشد، توزیع X را محاسبه کنید.

(ب) مقدار $E[X]$ را به ازای $1\le n\le 5$ به‌دست آورده و پاسخ خود را تحلیل کنید.

(ج) رباتی پیدا شده که با روش‌های جادویی می‌تواند رقم iاُم رمز $(\forall i: 1\le i\le n)$ را در ثانیه‌ی $Y_i\in[0,10]$ پیدا کند. اگر Y_iها متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت باشند، امید ریاضی زمان خنثی‌شدن بمب را محاسبه کنید.

۲۲. تاس سالمی را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا وجه ۶ را ببینیم. امید ریاضی و واریانس تعداد ۱ ها را محاسبه کنید.

۲۳. فرض کنید احتمال حضور هر یال در گراف ۱۰۰ راسی G برابر p باشد.

(آ) امید ریاضی و واریانس تعداد یال‌های G را محاسبه کنید.

(ب) احتمال این‌که تعداد یال‌های G برابر با ۴۸۵۱ باشد چقدر است؟

(ج) امید ریاضی تعداد مؤلفه‌های همبندی G به شرط این‌که G، ۴۸۵۱ یال داشته باشد را به دست آورید.

۲۴. زنبور ملکه هر سال با احتمال $\frac{1}{2^i}$ به تعداد $i \geq 1$ تخم می‌گذارد. انتظار می‌رود زنبور ملکه در سال پیش‌رو چند تخم بگذارد؟

۲۵. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با مقادیر طبیعی باشد. ثابت کنید X بی‌حافظه است اگر و تنها اگر دارای توزیع هندسی باشد.

۲۶. یک گونی داریم که ۷۰ توپ رنگی از ۷ رنگ مختلف در آن موجود است. همچنین می‌دانیم از هر رنگ ۱۰ توپ در گونی داریم. به تصادف ۲۰ تا از توپ‌ها را از گونی بیرون می‌کشیم. امید ریاضی تعداد رنگ‌های مختلفی که در این ۲۰ توپ دیده می‌شود چقدر است؟

۲۷. یک دسته کارت شامل ۵۲ کارت داریم. ۱۳ کارت آبی، ۱۳ کارت قرمز، ۱۳ کارت زرد و ۱۳ کارت سبز می‌باشند. کارت‌های هر رنگ با اعداد ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند.
یک‌بار تاس می‌اندازیم و به اندازه‌ی عدد تاس از دسته کارت، کارت برمی‌داریم. امید ریاضی و واریانس تعداد کارت‌های برداشته‌شده با شماره‌ی بیش از ۱۰ را محاسبه کنید.

۲۸. پمپ بنزین شکرستان دارای یک جایگاه برای بنزین‌زدن می‌باشد. ماشین‌ها در سه صفِ کنار هم برای بنزین‌زدن توقف کرده‌اند. هربار که یک ماشین بنزین می‌زند و جایگاه خالی می‌شود، متصدی پمپ بنزین به صورت تصادفی یکی از سه ماشین سر صف‌ها را برای ورود به جایگاه انتخاب می‌کند.
در ابتدا ماشین ننه‌قمر، دهمین ماشین در صف اول می‌باشد. اگر ماشین ننه‌قمر Xاُمین ماشینی باشد که وارد جایگاه می‌شود، امید ریاضی و واریانس X را محاسبه کنید. (فرض کنید طول صف‌ها نامتناهی است.)

۲۹. شکرستان به صورت یک جدول ۱۰۰۰ در ۱۰۰۰ می‌باشد که خانه‌های جدول، خانه‌های شهر هستند. شهرداری شکرستان برای اداره‌ی بهتر شهر، آن را به منطقه‌هایی به شکل مربع‌های $n \times n$ افراز کرده است. در شکرستان به‌طور متوسط، ماهانه ۵۰۰ آتش‌سوزی رخ می‌دهد.

(آ) اگر n برابر ۵۰ باشد، احتمال وقوع آتش‌سوزی در هر منطقه در ماه چقدر است؟

(ب) سکه‌ای که احتمال شیر آمدنش p است را n بار به طور مستقل پرتاب می‌کنیم. امید ریاضی و واریانس تعداد شیرها به شرط این‌که حداقل یک شیر مشاهده شود چه قدر است ؟

(ج) اگر n برابر ۱۰۰ باشد، زمان مورد انتظار برای اولین آتش‌سوزی در یک منطقه چند روز است؟

۳۰. عدد ۵۱۰۵۱۰ را داریم. در هر مرحله، اگر عددمان برابر k باشد، یکی از مقسوم‌علیه‌های k مثل d (شامل ۱ و k) را به تصادف انتخاب کرده، به جای k عدد kd را نگه می‌داریم. امید ریاضی عددی که بعد از ۱۰ مرحله داریم را محاسبه کنید.

۳۱. یک ربات در نقطه (a, b) قرار دارد. در هر گام به تصادف به یکی از نقاط $(a-1, b)$ یا $(a, b-1)$ می‌رود تا وقتی‌که به یکی از محورها برخورد کند (یکی از مختصه‌های آن صفر شود.) به چه احتمالی در لحظه توقف مختصه‌ی غیر صفرش k است؟

۳۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی است که فقط مقادیر صحیح و نامنفی را اخذ می‌کند. همچنین فرض کنید $E[X] = 1$ و $E\left[X^2\right] = 2$ و $E\left[X^3\right] = 5$. کمترین مقدار ممکن را برای $P(X = 0)$ به‌دست آورید.

۳۳. دو نفر می‌خواهند دوئل کنند. می‌دانیم که اگر ماشه‌ی تفنگ این دو نفر کشیده شود، تفنگ نفر اول با احتمال p و تفنگ نفر دوم با احتمال q شلیک می‌کند و درصورت شلیک، فرد مقابل حتماً کشته می‌شود. این دو نفر تا زمانی که هر دو زنده هستند، در هر ثانیه یک‌بار دوئل می‌کنند.(هم‌زمان با هم ماشه‌ی تفنگ خود را می‌کشند.)

(آ) اگر X تعداد ثانیه‌هایی باشد که هر دو زنده‌اند، $E\left[X\right]$ را محاسبه کنید. (اگر فردی در دوئل اول کشته شود، ۱ ثانیه زنده بوده است.)

(ب) احتمال اینکه در این دوئل هر دو نفر کشته شوند چقدر می‌باشد؟

۳۴. n توپ را با جای‌گذاری از کیسه‌ای شامل توپ‌های $1, 2, \ldots, n$ خارج می‌کنیم. امید ریاضی بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده چه قدر است؟ تقریبی از جواب برای nهای بزرگ ارائه کنید.

۳۵. قدم‌زن تصادفی روی $\mathbb{Z}$ حرکت خود را از مبدا آغاز می‌کند و در هر گام به احتمال برابر به یکی از اعداد مجاور خود می‌رود. به شرط این‌که قدم‌زن به n برسد قبل از این که -1 را ببیند، به طور میانگین چند بار به راست حرکت می کند؟ $(n \in \mathbb{N})$

۳۶. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی هندسی مستقل با پارامترهای p و q هستند. نشان دهید متغیر $min(X, Y)$ یک متغیر هندسی و با پارامتر $1 - (1-p)(1-q)$ است.

۳۷. فرض کنید A ماتریسی $2n \times 2n$ است که درایه‌هایش به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند. هر درایه می‌تواند با احتمال برابر مقدار ۰ یا ۱ داشته باشد. امید ریاضی $det(A - A^T)$ را به عنوان تابعی از n به‌دست آورید.

۳۸. جعبه‌ای داریم که شامل n توپ است که از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. هر سری توپی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم، شماره‌اش را یادداشت کرده و توپ را دوباره داخل جعبه می‌گذاریم. امید ریاضی تعداد دفعاتی را که همه اعداد را مشاهده کردیم بیابید.

۳۹. امیدریاضی سود ماکسیمال بازی زیر را محاسبه کرده و استراتژی مناسب برای آن را ارائه دهید.
یک تاس سالم ۳ بار پرتاب می‌شود. بعد از هر پرتاب، بجز سومی، بازیکن می‌تواند انتخاب کند که بازی را تمام کرده یا به بازی ادامه دهد. اگر بازیکن تصمیم به اتمام بازی بگیرد، به اندازه عدد فعلی ظاهر شده پول دریافت می‌کند (بین ۱ تا ۶). اگر بازی تا پرتاب سوم ادامه پیدا کند، بازیکن مقداری برابر با عدد ظاهر شده در پرتاب سوم دریافت می‌کند.

۴۰. بازی را در نظر بگیرید که در هر دور x دلار شرط بندی می‌کنید و اگر برنده شوید $2x$ دلار دریافت می‌کنید و اگر بازنده شوید پولی دریافت نمی‌کنید. در هر دور احتمال برنده و بازنده شدن برابر و $\frac{1}{2}$ است. همین‌طور فرض کنید نتیجه دورها مستقل از هم هستند.
استراتژی زیر را در نظر بگیرید.
دور اول را با ۱ دلار شروع می‌کنیم. اگر برنده شویم بازی را تمام کرده و اگر ببازیم دو برابر دفعه قبل شرط بندی می‌کنیم. در چنین استراتژی‌ای اگر برای اولین بار در nامین دور برنده شویم، مجموع پول برنده‌شده 2^n است.
نشان دهید

$$E[cumulative\ \ winning] = \infty$$

این مساله به پارادوکس سنت پترزبورگ شهرت دارد. پارادوکس در این است که ما برای بازی کردن مقدار بی‌نهایت نمی‌پردازیم.
توجه کنید که اگر بازی در دور nام تمام شود، مقدار پرداخت شده در دور های قبلی

$$2^0 + \cdots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$$

است. پس تفاوت مقدار برنده شده و خرج کرده برابر ۱ دلار است و به n بستگی ندارد.

$$2^{n-1} - (2^{n-1} - 1) = 1$$

به نظر می‌رسد این استراتژی بدون ریسک برای برنده‌شدن ۱ دلار است.
اما اگر بازیکن بتواند تنها M دلار خرج کند، حتی اگر M بزرگ باشد، مقدار برنده شده متناهی شده و نمی‌توان بدون ریسک ۱ دلار برنده شد.

۴۱. در سوال قبل فرض کنید G مقدار تجمعی پول‌های برنده‌شده را نشان دهد. برنولی به‌جای محاسبه امید ریاضی G، محاسبه امید ریاضی لگاریتم G را پیشنهاد داد. نشان دهید

$$\mathbb{E}[log_۲(G)] = log_۲(g) < \infty$$

و g را محاسبه کنید.

۴۲. فرض کنید متغیر تصادفی X مقدار برنده شده در یک بخت‌آزمایی باشد که توزیع آن به صورت زیر است.

$$P[X=n] = \frac{۱}{Cn^۲}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

که $C = \Sigma_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ بوده و متناهی است. نشان دهید $E[X] = \infty$.

توجه کنید که $C = \zeta(۲) = \frac{\pi^۲}{۶}$ بوده که $\zeta(s) = \Sigma_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^s}$ تابع زتای ریمان است.

۴۳. یک تاس انقدر انداخته می‌شود تا ۶ بیاید و در این صورت آزمایش تمام می‌شود. فضای نمونه آزمایش چیست؟ فرض کنید E_n پیشامدی باشد که n پرتاب برای پایان بازی نیاز باشد. چه برآمدهایی از فضای نمونه در E_n هستند؟ $\left(U_۱^{\infty} \;\; E_n\right)^c$ چیست؟

۴۴. بازی‌ای به این صورت است که بازیکنی دو تاس می‌اندازد. اگر مجموع دو تاس ۲،۳ یا ۱۲ باشد، بازیکن بازنده می‌شود. اگر مجموع ۷ یا ۱۱ باشد، برنده می‌شود. اگر نتیجه هر چیز دیگری باشد، بازیکن انقدر تاس‌ها را می‌ریزد که نتیجه ۷ یا همان نتیجه ابتدایی شود. اگر بازیکن ۷ بریزد می‌بازد. اگر پیش از آمدن ۷، نتیجه ابتدایی تکرار شود، بازیکن برنده می‌شود. احتمال برنده شدن بازیکن را پیدا کنید.

۴۵. فرض کنید سکه سالمی n بار پرتاب می‌شود. $Y_n = |H| - |T|$ را تعریف می‌کنیم که تعداد دفعاتی که شیر می‌آید منهای تعداد دفعاتی که خط می‌آید است. تابع توزیع احتمال Y_n و میانگین آن را بیابید.

۴۶. ثابت کنید اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند که برای تمام برامد ها $t \in S$ داشته باشیم
$X(t) < Y(t)$ ، برای تمام مقادیر w داریم $F_x(w) \geq F_y(w)$.

۴۷. دو سکه داریم که اولی سالم است. هر دو روی سکه دوم شیر هستند. یکی از سکه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و آن را دو بار می‌اندازیم و هر دو بار شیر می‌آید. احتمال اینکه سکه سالم انتخاب شده باشد چقدر است؟

درس احتمال و کاربردها
نیم سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

نامساوی‌های احتمالاتی، کواریانس و همبستگی، قضایای حدی

مدرس: دکتر حمیدرضا فنایی

گردآورندگان:

علی الماسی (دانشگاه صنعتی شریف)

نیوشا نجمایی (دانشگاه پلی‌تکنیک تورین)

---

۱. تابع چگالی توام دو متغیر تصادفی X و Y برای $0 < y < x < 1$ به‌صورت $f(x,y) = 6(x-y)$ و در غیر این‌صورت برابر صفر است. ضریب همبستگی X و Y را به‌دست آورید.

۲. بردار تصادفی (X,Y) دارای توزیع مشترکا نرمال با ضریب همبستگی $\rho = -0/5$ است و هر یک از توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال استاندارد هستند. مقدار αای را بیابید که به‌ازای آن دو متغیر تصادفی $V = \alpha X + Y$ و $W = X + \alpha Y$ از هم مستقل باشند.

۳. فرض کنید که (X,Y) دارای توزیع مشترکا نرمال با توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال استاندارد باشند. احتمال‌های $P(Y > X | X > 0)$ و $P(\frac{Y}{X} \leq 1)$ را بر حسب ضریب همبستگی X,Y به‌دست آورید. در صورت نیاز، از جدول مقادیر تابع ϕ کمک بگیرید.

۴. فرض کنید متغیر تصادفی X در بازه‌ی $[0,1]$ به‌صورت یکنواخت انتخاب می‌شود. سپس متغیر تصادفی R در بازه‌ی $[X,1]$ و متغیر تصادفی L در بازه‌ی $[0,X]$ به‌صورت یکنواخت و مستقل از یکدیگر تولید می‌شوند. متغیر تصادفی W را به‌صورت $W = R - L$ تعریف می‌کنیم. $Cov(W,X)$ را محاسبه کنید.

۵. تابع مولد گشتاور متغیرهای تصادفی زیر را محاسبه کنید:

- گاوسی استاندارد
- نمایی با متوسط ۱
- یکنواخت روی بازه‌ی $[0,1]$

۶. در یک شرکت باتری‌سازی، احتمال این‌که هر کدام از باتری‌ها خراب باشد برابر۰/۰۸ است. می‌خواهیم احتمال این‌که از بین ۱۰۰۰۰ باتری، بیش از ۲۰ تا خراب باشد را محاسبه کنیم.

(آ) ابتدا مقدار دقیق این احتمال را(با استفاده از سیگما و نه لزوما به فرم بسته) محاسبه کنید.

(ب) با استفاده از نامساوی مارکوف

$$P[X \geq a] \leq \frac{E[X]}{a}$$

ثابت کنید برای هر عدد حقیقی b داریم

$$P[X \geq b] \leq e^{-sb}\Phi(s) \quad for \quad s > 0$$

$$P[X \leq b] \leq e^{-sb}\Phi(s) \quad for \quad s < 0$$

که $\Phi(s) = E[e^{sX}]$

(ج) از قسمت قبل می‌توان دید که محاسبه این احتمال به صورت مستقیم و دقیق کار سختی خواهد بود. حال با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی، مقدار احتمال بالا را به صورت تقریبی و بر حسب توزیع نرمال محاسبه کنید.

۷. اگر n زن و شوهر دور یک میز گرد به صورت کاملا تصادفی بنشینند، امید ریاضی و واریانس تعداد زن و شوهرهایی که کنار یکدیگر نشسته‌اند را محاسبه کنید.

۸. فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی دوبه‌دو ناهم‌بسته با امید ریاضی μ و واریانس $\sigma^۲$ باشند. نشان دهید به ازای هر $\epsilon > ۰$ داریم:

$$P[|\frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{n} - \mu| \geq \epsilon]$$

۹. متغیر تصادفی X و $E[e^{sX}]$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که s متغیر تصادفی نیست پس $E[e^{sX}]$.

(آ) با استفاده از سری تیلور برای e^{sX}، ثابت کنید که برای بدست آوردن گشتاور Nام باید N بار از $E[e^{sX}]$ نسبت به s مشتق گرفته و تابع را در $s = ۰$ محاسبه کنیم.

(ب) گشتاور اول، دوم و واریانس $Y \sim Exponential(\lambda)$ را محاسبه کنید.

۱۰. اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، تابع مولد گشتاور توام آن‌ها به‌صورت

$$M_{X,Y}(t_۱, t_۲) = E\left[e^{t_۱ X + t_۲ Y}\right]$$

تعریف می‌شود.

(آ) $Cov(X, Y)$ را بر حسب تابع $M_{X,Y}(t_۱, t_۲)$ محاسبه کنید.

(ب) فرض کنید Z یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد. $Cov(Z, Z^۲)$ را محاسبه کنید.

۱۱. فرض کنید متغیر تصادفی X از توزیع پواسون باشد، طوری‌که $E[X] = ۹$ و فرض کنید $t = P(X \geq ۳۰)$. یکبار با کمک نامساوی مارکوف و یکبار با کمک نامساوی چبیشف کران بالایی برای مقدار t بیابید.

۱۲. تابع مولد گشتاور برای متغیر تصادفی X به‌صورت $M_X(t) = E\left[e^t X\right]$ تعریف می‌شود.

(آ) فرض کنید به‌ازای $t > ۰$، $M_X(t)$ تعریف‌شده باشد. نشان دهید:

$$P(X \geq u) \leq e^{-tu} M_X(t)$$

(ب) فرض کنید X یک متغیر تصادفی نرمال با امید ریاضی μ و انحراف معیار σ باشد. در این‌صورت:

(آ) $M_X(t)$ را محاسبه کرده و دامنه‌ی این تابع را مشخص کنید.

(ب) نشان دهید:

$$P(|X - \mu| \geq u) \leq ۲e^{\frac{-u^۲}{\sigma^۲}}$$

۱۳. n نفر در شهری زندگی میکنند و هر کدام از آن‌ها ۱۰۰۰ دوست دارند. (رابطه دوستی همیشه متقارن است). ثابت کنید که می‌توان گروه S را از بین افراد انتخاب کرد که حداقل $\frac{n}{۲۰۱۷}$ شخص از S دقیقاً دو دوست در S داشته باشد.

۱۴. فرض کنید سود روزانه شاخص سهامی توزیع نرمال با $\mu = ۰/۰۰۰۳۲$ و $\sigma = ۰/۰۰۸۵۹$ باشد. میانگین سود سهام این شاخص را برای یک نمونه تصادفی ۲۰ روزه در نظر بگیرید.

(آ) توزیع احتمال این میانگین نمونه را توصیف کنید

(ب) احتمال این که میانگین نمونه بیشتر از ۰/۰۰۵ باشد چقدر است؟

(ج) کدام یک از پیشامدهای زیر محتمل‌تر است؟
این که میانگین نمونه بیشتر از ۰/۰۰۷ باشد.
این که سود یک روز سهام بیشتر از ۰/۰۰۷ باشد.

۱۵. یک شرکت تلفن اعلام کرده‌است که در روزهای کاری تعداد تماس‌های برقرار شده با شرکت در هر ساعت توزیع احتمال نرمال با $\mu = ۸۰۰۰۰$ و $\sigma = ۳۵۰۰۰$ دارد. فرض کنید ۶۰ ساعت کاری به تصادف انتخاب شده و میانگین تعداد تماس های برقرار شده $\bar{x}$ محاسبه می‌شود.

(آ) توزیع احتمال $\bar{x}$ را توصیف کنید.

(ب) احتمال این که $\bar{x}$ برای این ۶۰ ساعت بزرگ‌تر از ۹۱۹۷۰ باشد چقدر است؟

(ج) کدام یک از دو پیشامد زیر محتمل‌تر هستند؟
$\bar{x}$ بزرگ‌تر از ۷۵۰۰۰ باشد.
تعداد تماس های دریافتی در یک ساعت بیشتر از ۷۵۰۰۰ باشد.

۱۶. فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $i.i.d$ با توزیع نرمال استاندارد باشند و $Y_۱, Y_۲, \ldots, Y_n, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $i.i.d$ با توزیع نمایی و امید ریاضی ۱ باشند. ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(max(Y_۱, \ldots, Y_n) > max(X_۱, \ldots, X_n)\Big) = ۱$$

۱۷. فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد که $E\left[X\right] = E\left[X^۲\right] = ۰$. در این‌صورت ثابت کنید

$$P(X = ۰) = ۱$$

۱۸. فرض کنید برای متغیر تصادفی X گشتاور از هر مرتبه‌ای وجود دارد. مقدار کمینه‌ی $E\left[|X-c|\right]$ به‌ازای چه مقداری از c رخ می‌دهد؟

۱۹. فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_{۱۰}$ متغیرهای تصادفی $i.i.d$ با توزیع $U\left[۰, ۱\right]$ باشند.
نخست، یکبار با استفاده از نامساوی مارکوف و یکبار با استفاده از نامساوی چبیشف یک کران بالا برای مقدار احتمال زیر بیابید. سپس با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی آن را تقریب بزنید.

$$P(X_۱ + \cdots + X_{۱۰} \geq ۷)$$

۲۰. فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی $i.i.d$ با متوسط μ و انحراف‌معیار σ باشند. متغیرهای تصادفی $M = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i$ و $S^۲ = \sqrt{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - M)^۲}$ را در نظر بگیرید.

(آ) ثابت کنید:

$$Var(S^۲) = \frac{\mu_۴}{n} - \frac{\sigma^۴(n-۳)}{n(n-۱)}$$

که در آن $\mu_۴ = E\left[(X_i - \mu)^۴\right]$.

(ب) اگر X_iها دارای توزیع نرمال استاندارد باشند واریانس $S^۲$ را بر حسب n محاسبه کنید.

۲۱. قیمت یک سهم از سهام شرکتی در روز nام سال Y_n است. مشاهده می‌شود که $X_n = Y_{n+۱} - Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع احتمال یکسان هستند و داریم $\mu = ۰$ و $\sigma^۲ = \frac{۱}{۴}$. اگر $Y_۱ = ۱۰۰$ ، احتمال پیشامدهای زیر را محاسبه کنید.

(آ) $Y_{۳۶۵} \geq ۱۰۰$

(ب) $Y_{۳۶۵} \geq ۱۱۰$

(ج) $Y_{۳۶۵} \geq ۱۲۰$

۲۲. یک نظرسنجی درباره ترجیح دادن پپسی یا کوکاکولا از ۱۵۰۰ نفر انجام شده‌است. نتایج نشان می‌دهد که ۲۷ درصد مردم کوکاکولا را ترجیح می‌داده و ۷۳ درصد باقی‌مانده پپسی را ترجیح می‌دهند. خطای حاشیه‌ای نظرسنجی را با اطمینان ۹۰درصد محاسبه کنید.

۲۳. فرض کنید شخصی به شما یک سکه می‌دهد و ادعا می‌کند که این سکه خراب بوده و ۴۸ درصد مواقع شیر می‌آید. شما تصمیم می‌گیرید خودتان سکه را امتحان کنید. اگر بخواهید ۹۵ درصد اطمینان داشته باشید که سکه واقعاً سالم نیست، چند بار باید سکه را بیاندازید؟

۲۴. میانگین قطر تیله‌های تولید شده در یک کارخانه اسباب‌بازی ۰٫۸۵۰ و $\sigma = ۰٫۰۱$ سانتی‌متر است. یک نمونه ۱۰۰ تایی از تیله‌ها را انتخاب می‌کنیم. احتمال این که میانگین قطر آن‌ها بیشتر از ۰٫۸۵۱ سانتی‌متر باشد چقدر است؟

۲۵. کارخانه‌ای کیسه سیمان تولید می‌کند و وزن آن ها W بوده و $E(W) = ۱۶$ و $\sigma(W) = ۰٫۲$ کیلوگرم باشد. فرض کنید ۴۸ کیسه به تصادف انتخاب شده و در جعبه‌ای قرار داده شده باشند.

(آ) توزیع احتمال وزن جعبه M را توصیف کنید.

(ب) احتمال این که وزن جعبه بیشتر از ۷۷۱٫۲ کیلوگرم باشد چقدر است؟