تاریخ: ۹ بهمن ۱۴۰۱
مدت آزمون: ۳ ساعت

آزمون پایان‌نیم‌سال منطق ریاضی

---

۱. **(۲ نمره)** معتبر بودن هر یک از دو جمله زیر را با رسم درخت استنتاج طبیعی مناسب تحقیق کنید.

(آ) $\neg\neg\forall x A(x) \to \forall x\, \neg\neg A(x)$

(ب) $\forall x\big(A(x) \to \exists y B(x,y)\big) \to \big(\exists x A(x) \to \exists y \exists x B(x,y)\big)$

۲. **(۲ نمره)** فرض کنید P و Q دو نماد محمولی یک‌موضعی هستند. نامعتبر بودن هر یک از دو جمله زیر را با رسم تابلوی کامل مناسب تحقیق کنید و مدل نقضی از روی آن ارائه دهید.

(آ) $\big(\forall x P(x) \to \exists x Q(x)\big) \to \exists x\big(P(x) \vee Q(x)\big)$

(ب) $\exists x\big(P(x) \to \exists x\, \neg P(x)\big) \to \forall x\, \neg P(x)$

۳. **(۲ نمره)** فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه یک و $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$-ساختار باشد. $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ عبارت است از مجموعه همه $\mathcal{L}$-جمله‌های صادق در $\mathfrak{M}$. ثابت کنید یک مجموعه Γ از $\mathcal{L}$-جمله‌ها سازگار ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\mathcal{L}$-ساختار $\mathfrak{M}$ وجود داشته باشد که $\Gamma = \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$.

۴. **(۲ نمره)** فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه یک و $\mathcal{K}$ رده‌ای از $\mathcal{L}$-ساختارها باشد. گوییم $\mathcal{K}$ اصل‌پذیر است هرگاه مجموعه‌ای چون Γ از $\mathcal{L}$-جمله‌ها موجود باشد به طوری که اعضای $\mathcal{K}$ دقیقاً مدل‌های Γ باشند؛ یعنی $\mathcal{K} = \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \models \Gamma\}$. نشان دهید رده همه مجموعه‌های خوش‌ترتیب[1] اصل‌پذیر نیست. (راه‌نمایی: از قضیه فشردگی استفاده کنید.)

۵. **(۲ نمره)** فرض کنید $\mathcal{L}$ زبانی مرتبه یک با نماد تساوی باشد که هیچ نماد ثابت، تابعی و محمولی در آن نیست. ثابت کنید اگر مجموعه Γ از $\mathcal{L}$-جمله‌ها در یک $\mathcal{L}$-ساختار nعضوی صادق باشد، آنگاه در هر $\mathcal{L}$-ساختار nعضوی صادق است.

۶. **(۱ نمره)** یک صورت نرمال پیشوندی برای فرمول زیر بیابید:

$$\forall x\big(\exists y A(x,y) \to \exists z B(x,z)\big) \to \forall x C(x,y)$$

---

[1] یک مجموعه مرتب کامل، خوش‌ترتیب است هرگاه دنباله‌ای اکیداً نزولی و نامتناهی از اعضای آن وجود نداشته باشد.

۷. (۱٫۵ نمره) فرض کنید $\mathcal{L}$ زبانی مرتبه یک شامل نماد محمولی دو موضعی R باشد. $\mathcal{L}$-جمله‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A : \forall x R(x,x)$$

$$B : \forall x \neg R(x,x)$$

$$C : \forall x \forall y \big(R(x,y) \to R(y,x)\big)$$

$$D : \forall x \forall y \big(R(x,y) \to \neg R(y,x)\big)$$

$$E : \forall x \forall y \forall z \big(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)\big)$$

$$F : \forall x \exists y R(x,y)$$

(آ) نشان دهید $\Gamma = \{A, C, E, F\}$ ارضاپذیر است.

(ب) نشان دهید $\Gamma = \{B, D, E, F\}$ ارضاپذیر است.

(پ) نشان دهید $\Gamma = \{B, C, E, F\}$ ارضاپذیر نیست.