نیمسال دوم ۱۳۹۸ **دانشکده‌ی علوم ریاضی**

مدرس: دکتر علیرضا بحرینی

جبرخطی۱

کارگاه حل مسأله ۶ اسفندماه ۱۳۹۸

مساله ۱

(آ) فرض کنید F یک میدان و $0 \in F$ عضو خنثی جمع آن باشد. ثابت کنید برای هر $a \in F$ داریم: $0 \times a = 0$.

(ب) ثابت کنید عضو خنثی ضربِ یک میدان، یکتاست.

(ج) فرض کنید F یک میدان باشد. ثابت کنید اگر $a \times b = 0$ آنگاه حداقل یکی از a و b صفر است.

مساله ۲

میدان $(\mathbb{R}, +, \times)$ را در نظر بگیرید.($+$ و $\times$ همان جمع و ضرب معمولی است.)
حال $+'$ و $\times'$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$a +' b = a \times b \qquad a \times' b = a + b$$

(آ) الف) آیا $(\mathbb{R}, +', \times')$ میدان است؟

(ب) ۰ و ۱ میدان با این تعریف از ضرب و جمع را بیابید.

(ج) قسمت الف و ب را برای میدان دلخواه $(F, +, \times)$ جواب دهید.

مسأله ۳

(آ) ثابت کنید هر میدان با مشخصه(سرشت‌نما)ی صفر، شاملِ یک کپی از مجموعه‌ی اعداد گویاست.

(ب) آیا میدان ۴ عضوی وجود دارد؟

(ج) بدون استفاده از قضیه گفته شده در کلاس مبنی بر این که تعداد اعضای میدان‌های متناهی به فرم p^n است، ثابت کنید میدان ۶ عضوی نداریم.

مسأله ۴

منظور از عملگر دوتایی $\otimes$ روی مجموعه G یک تابع $\otimes : G \times G \to G$ است.
زوج $(G, \otimes)$ را یک گروه می‌نامیم هرگاه:

(آ) $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$ برای هر $a, b, c \in G$.

(ب) عضو e در G موجود باشد به‌نحوی‌که برای هر $g \in G$، $e \otimes g = g \otimes e = g$.

(ج) برای هر عضو $g \in G$، عضو g' در G موجود باشد به‌نحوی‌که: $g \otimes g' = g' \otimes g = e$.

گروه G را آبلی گویند هرگاه برای هر دو عضو a و b در G، $a \otimes b = b \otimes a$.

آیا مجموعه‌ی $\mathbb{F}$ و عملگرهای دوتایی $+$، $\times_۱$ و $\times_۲$ وجود دارند به‌طوری‌که $(\mathbb{F}, +)$ گروه آبلی باشد و $(\mathbb{F}, \times_۱)$ و $(\mathbb{F}, \times_۲)$ نیز هر دو، گروه آبلی باشند، اما فقط یکی از $(\mathbb{F}, +, \times_۱)$ و $(\mathbb{F}, +, \times_۲)$ میدان باشد؟

مسأله ۵

فرض کنید ماتریس‌های $\eta_۱, \ldots \eta_m$ که $n \times ۱$ هستند، جواب‌های دستگاه $Ax = b$ باشند که $b \neq ۰$. ثابت کنید $\Sigma_{i=۱}^{m} \lambda_i \eta_i$ جواب $Ax = b$ است اگر و تنها اگر $\Sigma_{i=۱}^{m} \lambda_i = ۱$. همچنین ثابت کنید اگر $\Sigma_{i=۱}^{m} \alpha_i \eta_i = ۰$ آنگاه $\Sigma \alpha_i = ۰$.

مسأله ۶

نشان دهید در صورت برقراری شرایط زیر، $A^۲ + B^۲$ وارون پذیر نیست.

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$
$A^۲ B = B^۲ A$
$A^۳ = B^۳$
$A \neq B$

مسأله‌ی ۷

ثابت کنید ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$ وجود ندارد که $A^n = ۰$ و $A^T = I + A + A^۲ + \cdots + A^{n-۱}$.

مسأله‌ی ۸

میدان F و عنصر $x \in F$ و ماتریس $A_{m \times n}$ و $B_{n \times m}$ را در نظر بگیرید به طوری که $x \neq ۰$.ثابت کنید $AB - xI_m$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر $BA - xI_n$ وارون پذیر باشد.

مسأله ۹

آیا ماتریس‌های A و B که $n \times n$ هستند، موجودند به طوری که $AB - BA = I$؟