درس جبرخطی۱
نیم‌سال دوم ۱۳۹۸

راهنمایی‌هایی برای تمرین سری سوم (بخش دوم)

۱. (آ) از استقرا روی n استفاده کنید. (حکم مسئله باید به شکل $A^nB - BA^n = nA^{n-1}$ تصحیح شود.)

(ب) (۱) باید نشان دهید که هر زیرمجموعه‌ی متناهی‌عضوی از مجموعه‌ی داده‌شده مستقل خطی است. از استقرا روی تعداد عناصر این زیرمجموعه استفاده کنید.

(۲) پایه‌ی استقرا را برای زیرمجموعه‌های تک‌عضوی به شکل $\{A^k\}$ با استفاده از قسمت (آ) و اینکه A پوچ‌توان نیست (چرا؟)، ثابت کنید.

(۳) برای اثبات گام استقرا، ابتدا می‌توانید حالات $n = ۲$ و $n = ۳$ را بررسی کنید تا ایده‌ی اثبات گام استقرا مشخص شود. حال زیرمجموعه‌ای دلخواه مانند $\{A^{i_۱}, A^{i_۲}, \dots, A^{i_{n+۱}}\}$ را در نظر بگیرید و نشان دهید که اگر عضوی از این مجموعه را بتوان به صورت ترکیب خطی بقیه‌ی اعضای آن نوشت، آنگاه یک ترکیب خطی از باقی اعضا (که تعدادشان nتاست) وجود دارد که برابر صفر می‌شود.

(۴) برای این کار، فرض کنید $A^{i_k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A^{i_j}$. متوالیاً از قسمت (آ) استفاده کنید و تساوی‌های $\alpha_j A^{i_j+۱}B - \alpha_j BA^{i_j+۱} = (i_j + ۱)\alpha_j A^{i_j}$ را جمع کنید.

(ج) به یاد بیاورید که فضای همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$، یک فضای برداری با بُعد $n^۲$ است.

۲. اگر $\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Im} U = \{o\}$، آنگاه با در نظر گرفتن پایه‌ی $\{T(v_۱), T(v_۲), \dots, T(v_m)\}$ برای $\operatorname{Im} T$ و پایه‌ی $\{U(w_۱), U(w_۲), \dots, U(w_n)\}$ برای $\operatorname{Im} U$، یک پایه برای $\operatorname{Im}(T + U)$ با استفاده از اجتماع این دو بسازید. برای این کار، نشان دهید این مجموعه مولد $\operatorname{Im}(T + U)$ است و با استفاده از فرض $\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Im} U = \{o\}$، نشان دهید این مجموعه مستقل خطی است.

برای اثبات عکس حالت بالا، با استفاده از رابطه‌ی $\operatorname{rank}(T + U) = \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(U)$ و گرفتن پایه برای $\operatorname{Im} T$ و $\operatorname{Im} U$، نشان دهید $\operatorname{Im}(T + U) = \operatorname{Im} T + \operatorname{Im} U$. حال با فرض $a \in \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Im} U$، a را به صورت ترکیب خطی پایه‌ی $\operatorname{Im} T$ و نیز پایه‌ی $\operatorname{Im} U$ بنویسید و با برابر قرار دادن این دو، نتیجه بگیرید که $a = o$.

۳. (۱) از استقرا روی n استفاده کنید. پایه‌ی استقرا برای $n = ۰$ واضح است.

(۲) برای اثبات گام استقرا، از فرض مسئله برای n استفاده کنید و حکم مسئله برای $n + ۱$ را به شکل زیر ساده کنید:

$$\dim(\ker A^{n+۱}) = \dim(\ker A^n) + \dim(\operatorname{Im} A^n \cap \ker A)$$

(۳) یک پایه برای $\operatorname{Im} A^n \cap \ker A$ در نظر بگیرید و آن را به یک پایه برای $\ker A^n$ گسترش دهید. حال با استفاده از این دو پایه، یک پایه برای $\ker A^{n+۱}$ بسازید.

۴. (۱) اگر A_n وارون‌پذیر باشد که مسئله حل شده است.

(۲) پس فرض کنیم این‌طور نباشد، در نتیجه معادله‌ی $AX = O$ یک جواب ناصفر مانند $X_۰$ دارد (چرا؟). حال برای حل سؤال، می‌توانید ابتدا به طور عکس به سؤال فکر کنید؛ فرض کنید که ماتریس B با این ویژگی که $ABA = A$ وجود دارد. چه نتایجی می‌توانید از این عبارت بگیرید؟

(۳) باید داشته باشیم $A(BA-I)=O$؛ یعنی اگر E_iها بردارهای استاندارد و A_iها ستون‌های ماتریس A باشند، در این صورت برای هر $1 \leq i \leq n$ باید داشته باشیم: $A(BA_i - E_i)=O$.

(۴) فرض کنید $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ ستون‌های مستقل A باشند. ماتریس B را طوری بسازید که برای هر $1 \leq j \leq k$ داشته باشیم $BA_{i_j} = X_0 + E_{i_j}$. نشان دهید B ویژگی مورد نظر ما را دارد. (همواره قضیه‌ی ۱ بخش ۳.۱ کتاب هافمن را برای ساختن یک نگاشت خطی با استفاده از عناصر پایه در نظر داشته باشید.)

۵. برای قسمت (ب)، استفاده از $(\ln P)' = \frac{P'}{P}$ و $\int \frac{dx}{1-x} = \ln\left|\frac{1}{1-x}\right| + C$ راهگشا خواهد بود.

۶. (آ) (۱) می‌توان به طور عکس به مسئله نگاه کرد؛ فرض کنید حکم مسئله درست باشد و $v = u + T(w)$ که $u \in \ker T$. توجه کنید که در این صورت $T(v) = T^2(w)$.

(۲) بنابر فرض‌های سؤال، برای بردار دلخواه $v \in V$، بردار w وجود دارد به‌طوری که $T(v) = T^2(w)$. حال $v = (v - T(w)) + T(w)$ را بررسی کنید.

(ب) (آ) می‌توان به طور عکس به مسئله نگاه کرد و با فرض درستی حکم مسئله، نمایش مورد نظر را به‌دست آورد. تساوی $v = \frac{v+T(v)}{2} + \frac{v-T(v)}{2}$ را بررسی کنید.

(ب) یک پایه برای $\ker(T - I_V)$ و یک پایه برای $\ker(T + I_V)$ در نظر بگیرید.

۷. یک پایه برای V_0 در نظر بگیرید و آن را به پایه‌ای برای V_1 گسترش دهید. این پایه را به پایه‌ای برای V_2 گسترش دهید و این کار را متوالیاً تکرار کنید.

۸. (آ) برای اثبات $\operatorname{rank}(SoT) \leq \operatorname{rank}(T)$، نگاشت تحدیدشده‌ی $S' : \operatorname{Im} T \to W$ را در نظر بگیرید. قضیه‌ی رتبه-پوچی را برای S' بنویسید.

(ب) برای نابرابری سمت راست، از رابطه‌ی $\operatorname{Im}(T_1 + T_2) \subset \operatorname{Im} T_1 + \operatorname{Im} T_2$ استفاده کنید. نابرابری سمت چپ از نابرابری سمت راست به‌دست می‌آید.

(ج) (۱) فرض کنید V یک فضای برداری با بعد n باشد و $T_1(X) = AX$ و $T_2(X) = BX$ نگاشت‌هایی خطی روی V باشند. باید ثابت کنیم $\operatorname{rank}(T_1 o T_2) \geq \operatorname{rank}(T_1) + \operatorname{rank}(T_2) - \dim V$.

(۲) قضیه‌ی رتبه-پوچی را برای T_1 بنویسید و با استفاده از آن رابطه‌ی بالا را ساده کنید.

(۳) نگاشت تحدیدشده‌ی $T_1' : \operatorname{Im} T_2 \to V$ را در نظر بگیرید و قضیه‌ی رتبه-پوچی را برای آن بنویسید. با استفاده از آن، حکم را باز هم ساده‌تر کنید. (برای محاسبه‌ی رتبه‌ی ترکیب دو نگاشت خطی، ایده‌ی تحدید یک نگاشت معمولاً سودمند است.)

۹. (آ) اگر $v \in \operatorname{Im} A$، آنگاه ماتریس A به شکل $A = [\, \alpha_1 v \mid \alpha_2 v \mid \ldots \mid \alpha_n v \,]$ خواهد بود که $\alpha_i \in F$. پس $A^2 = [\, \alpha_1 Av \mid \alpha_2 Av \mid \ldots \mid \alpha_n Av \,]$. در نتیجه کافی‌ست برای هر i نشان دهید $\alpha_i Av = tr(A)\alpha_i v$.

(ب) به راحتی می‌توانید دو تساوی $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix} = \operatorname{rank}(A)$ و $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} O \\ B \end{bmatrix} = \operatorname{rank}(B)$ را ثابت کنید. حکم را از این دو تساوی نتیجه بگیرید.

۱۰. (آ) فرض کنید V یک فضای برداری با بعد n باشد. دو نگاشت خطی $L_1, L_2 : V \to V$ را با ضابطه‌ی $L_1(X) = AX$ و $L_2(X) = BX$ در نظر بگیرید. با استفاده از فرض سؤال، نشان دهید که L_1 پوشا و L_2 یک‌به‌یک است، سپس نتیجه بگیرید که هر دو وارون‌پذیر هستند.

(ج) فرض را به شکل $(A-I)(B-I) = I$ بنویسید.