



۱. به روش زیر ثابت کنید ماتریس‌های A و B وجود ندارند که $AB - BA = I$.

(آ) فرض کنید $AB - BA = I$. ثابت کنید برای هر n داریم:

$$A^n B - B^n A = nA^{n-1}$$

(ب) با فرض بالا نشان دهید مجموعه $\{I, A, A^2, \dots\}$ مستقل خطی است.

(ج) از مساله قبل نتیجه بگیرید که فرض $AB - BA = I$ نمی‌تواند برقرار باشد.

۲. برای دو نگاشت خطی T و U نشان دهید $rank(T+U) = rank(T) + rank(U)$ اگر و تنها اگر $Im(T) \cap Im(U) = \{0\}$.

۳. فرض کنید A یک عملگر خطی باشد، ثابت کنید:

$$dim(Ker A^{n+1}) = dim(Ker A) + \sum_{k=1}^n dim(Im A^k \cap Ker A)$$

۴. نشان دهید برای هر ماتریس مربعی A ، ماتریس B وجود دارد که $ABA = A$.

۵. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد و V مجموعه‌ی تمام چندجمله‌ای‌هایی باشد که درجه‌شان کوچک‌تر یا مساوی n است. نگاشت $f: V \rightarrow V$ را برای $P(x) \in V$ به صورت $f(P(x)) = P(x) + (1-x)P'(x)$ تعریف می‌کنیم.

(آ) نشان دهید f یک نگاشت خطی است.

(ب) یک پایه برای هسته‌ی f بیابید.

۶. (آ) فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد و $T: V \rightarrow V$ نگاشتی خطی باشد به طوری که داشته باشیم:

$$Ker T = Ker T^2 \text{ و } Im T = Im T^2. \text{ نشان دهید } V = Ker T \oplus Im T.$$

(ب) فرض کنید V یک فضای برداری با بعد n روی میدان \mathbb{R} باشد و $T: V \rightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد که $T^2 = I_V$.

$$(آ) ثابت کنید $V = Ker(T - I_V) \oplus Ker(T + I_V)$.$$

(ب) نتیجه بگیرید که $1 \leq i \leq n$ و یک پایه برای V وجود دارد به طوری که ماتریس متناظر با T نسبت به این پایه به شکل

$$\begin{bmatrix} I_i & 0 \\ 0 & -I_{n-i} \end{bmatrix} \text{ باشد.}$$

فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد و $T: V \rightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد. ثابت کنید گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۷. (آ) زیرفضاهای $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $1 \leq k \leq n$ ، $dim V_k = k$ و $T(V_k) \subset V_k$.

(ب) یک پایه برای V وجود دارد به طوری که ماتریس متناظر با T نسبت به این پایه بالامثلثی باشد.

۸. (آ) فرض کنید $T : U \rightarrow V$ و $S : V \rightarrow W$ نگاشت‌هایی خطی باشند. نشان دهید:

$$\text{rank}(SoT) \leq \min(\text{rank}(S), \text{rank}(T))$$

(ب) فرض کنید $T_1, T_2 : U \rightarrow V$ نگاشت‌هایی خطی باشند. نشان دهید:

$$|\text{rank}(T_1) - \text{rank}(T_2)| \leq \text{rank}(T_1 + T_2) \leq \text{rank}(T_1) + \text{rank}(T_2)$$

(ج) نشان دهید که اگر $A, B \in M_n(F)$ ، آنگاه

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$$

۹. (آ) فرض کنید $A \in M_n(F)$ و $\text{rank}(A) = 1$. نشان دهید $A^\times = \text{tr}(A)A$.

(ب) فرض کنید $A \in M_m(F)$ و $B \in M_n(F)$. نشان دهید:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & o \\ o & B \end{bmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

۱۰. (آ) فرض کنید A و B ماتریس‌هایی $n \times n$ باشند به طوری که $AB = I$. ثابت کنید A و B هر دو وارون پذیراند.

(ب) با استفاده از قسمت (آ) نشان دهید که اگر $AB = I$ ، آنگاه $BA = I$.

(ج) نشان دهید که اگر $A, B \in M_n(C)$ و $AB = A + B$ ، آنگاه $AB = BA$.