درس جبرخطی۱
نیم‌سال دوم ۱۳۹۸

راهنمایی‌هایی برای تمرین سری اول

۱. اگر F یک زیرمیدان $\mathbb{C}$ باشد، $۰, ۱ \in F$. چون F تحت عمل جمع بسته است، باید شامل اعداد طبیعی باشد. چون برای هر عضو F وارون جمعی‌اش نیز عضو F است، قرینه‌های اعداد طبیعی نیز مشمول در F هستند و به این ترتیب، این زیرمیدان شامل اعداد صحیح است. حال با روندی مشابه، نشان دهید اعداد گویا نیز در F هستند.

۲. دو دستگاه معادلات خطی همگن دومجهولی را در نظر بگیرید. به هر یک از این دستگاه‌ها می‌توان به‌عنوان تعدادی معادله‌ی خط مبدأگذر در صفحه نگاه کرد. با این تعبیر، داشتن مجموعه جواب یکسان برای دو دستگاه، به این معنی است که اشتراک خطوط هر یک از این دو دستگاه با هم برابر می‌شوند. اشتراک خطوط هر دستگاه یا نقطه‌ی مبدأ است و یا یک خط.
در هر یک از این دو حالت، تلاش کنید هر معادله در یک دستگاه را به‌صورت ترکیب خطی معادلات دستگاه دیگر بنویسید.
در حالتی که مجموعه جواب یک خط است کار بسیار راحت است. در حالت دیگر، توجه کنید که حداقل دو خط در یک دستگاه وجود دارند که در یک راستا نیستند. سعی کنید هر معادله در دستگاه دیگر را به‌صورت ترکیب خطی معادله‌ی آن دو خط بنویسید.

۳. باید کمی محاسبات انجام دهید!
اگر معادله‌ی $C = AB - BA$ را بعد از پارامترگذاری درایه‌های ماتریس‌ها بازنویسی کنید، یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن خواهید داشت. برای اثبات حکم باید از شرایط جواب داشتن یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن استفاده کنید.

۴. برای این سوال هم کمی حوصله گذاشتن و حالت‌بندی کردن لازم است!
برای شروع، ماتریس‌های تحویل‌یافته‌ی سطری پلکانی ۳×۲ را برحسب محل قرارگرفتن اولین درایه‌ی ناصفر در هر سطر، دسته‌بندی کنید و پس از آن، مجموعه جواب‌های $RX = O$ را در هر حالت مورد بررسی قرار دهید.

۵. فرض کنید ماتریس‌های A و B چنان هستند که جمع درایه‌های هر سطر و هر ستونشان ثابت و به ترتیب m و n است. ثابت کنید جمع درایه‌های هر سطر و هر ستون ماتریس حاصلضرب برابر mn است. این هم نتیجه‌ی سرراست تعریف ضرب دو ماتریس است.

۶. این قضیه را در کلاس دیده بودید (و اگر ندیده‌اید خوب است ثابتش کنید):
قضیه: فرض کنید F یک میدان و $F_۱ \subset F$ زیرمیدانی از آن باشد. اگر درایه‌های A و Y در زیرمیدان $F_۱$ باشند و معادله‌ی $AX = Y$ در F جواب داشته باشد، آن‌گاه در $F_۱$ نیز جواب دارد.
با کمک این قضیه به قسمت اول پاسخ داده می‌شود.
برای قسمت دوم، کافی است یک جواب نابدیهی در $\mathbb{Q}$ را در نظر بگیرید و جواب را در ک.م.م. مخرج‌ها ضرب کنید.

۷. به‌خاطر بیاورید که ماتریس $A_{n\times n}$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر معادله $AX = O$ جواب نابدیهی نداشته باشد.
همچنین بد نیست یادآوری کنیم اگر ماتریس‌های $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ را داشته باشیم و $B = [B_۱|\dots|B_n]$ که $B_۱, \dots, B_n$ ستون‌های B باشند، ماتریس AB را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$AB = [AB_۱|\dots|AB_n]$$

با یادآوری این دو مطلب، در قسمت اول می‌توانید به سادگی نشان دهید که ستون‌های ماتریس B، همگی برابر بردارهای ستونی صفرند.
مشابهاً در قسمت دوم، از این‌که اگر A وارون‌پذیر نباشد، معادله $AX = O$ جواب نابدیهی دارد استفاده کنید و ماتریس ناصفر B را بسازید.

۸. اگر ماتریس A وارون‌پذیر باشد و B هم‌ارز سطری A باشد، B نیز وارون‌پذیر است.
برای اثبات یک طرف حکم، توجه کنید هر ماتریس مربعی را با انجام عملیات سطری مقدماتی می‌توانید قطری کنید. ثابت کنید برای این‌که ماتریس قطری وارون‌پذیر باشد، باید درایه‌های روی قطر اصلی ناصفر باشند. طرف دیگر، ساده است.

۹. به یاد بیاورید که اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد که $m < n$ در این صورت دستگاه $AX = O$ جواب نابدیهی دارد.
هم‌چنین دقت کنید که اگر X جوابی نابدیهی برای $BX = O$ باشد، جواب نابدیهی $(AB)X = O$ نیز خواهد بود.