درس جبرخطی۱
نیم سال دوم ۱۳۹۸

تمرین سری اول

۱. ثابت کنید هر زیرمیدان $\mathbb{C}$ شامل اعداد گویا است.

۲. ثابت کنید که اگر دو دستگاه معادلات خطی همگن دو مجهولی، مجموعه جواب‌های یکسان داشته باشند، هم‌ارزند.

۳. فرض کنید C یک ماتریس 2×2 باشد. می‌خواهیم ماتریس‌های $A_{2\times 2}$ و $B_{2\times 2}$ را چنان بیابیم که

$$C = AB - BA$$

ثابت کنید شرط لازم و کافی آن است که $tr(C) = 0$.

۴. فرض کنید R و R' دو ماتریس 3×2 تحویل‌یافته سطری پلکانی باشند به نحوی‌که $RX = O$ و $R'X = O$ مجموعه جواب‌های یکسان داشته باشند. ثابت کنید $R = R'$.

۵. فرض کنید در ماتریس $A_{n\times n}$ جمع درایه‌های هر سطر و جمع درایه‌های هر ستون برابر عدد ثابت C شده است؛ یعنی برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم:

$$\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} = \Sigma_{j=1}^{n} a_{ji} = C$$

ثابت کنید برای هر $m \in N$ ماتریس A^m نیز این خاصیت را دارد، یعنی جمع درایه‌های هر سطر و هر ستون آن عددی ثابت است.

۶. اگر $A \in M_n(\mathbb{R})$ و دستگاه $AX = O$ جواب نابدیهی در $\mathbb{C}$ داشته باشد، ثابت کنید جواب نابدیهی در $\mathbb{R}$ نیز دارد. همچنین اگر $A \in M_n(\mathbb{R})$ و دستگاه $AX = O$ جواب نابدیهی در $\mathbb{Q}$ داشته باشد، ثابت کنید جواب نابدیهی در $\mathbb{Z}$ نیز دارد.

۷. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد. گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

(آ) اگر A وارون‌پذیر باشد و $AB = O$ برای یک ماتریس $B_{n\times n}$، آنگاه $B = O$.

(ب) اگر A وارون‌پذیر نباشد، آنگاه ماتریس $B_{n\times n}$ وجود دارد به‌طوری‌که $AB = O$ ولی $B \neq O$.

۸. ماتریس $A_{n\times n}$ بالامثلثی نامیده می‌شود هرگاه $A_{ij} = 0$ برای $i > j$. (به عبارت دیگر، هر درایه واقع در زیر قطر اصلی صفر باشد.) ثابت کنید یک ماتریس بالامثلثی وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر هر درایه‌ی قطر اصلی ناصفر باشد.

۹. (آ) اگر A یک ماتریس 1×2 و B یک ماتریس 2×1 باشد، ثابت کنید $C = AB$ وارون‌پذیر نیست.

(ب) اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ باشد که $n < m$، آنگاه AB وارون‌پذیر نیست.