# درس جبرخطی۱
# نیم سال دوم ۱۳۹۸

## تمرین تحویلی سری دوم (امتیازی)

۱. فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ و $A^۲ - ۳A + ۲I = O$. ثابت کنید $\det A$ ریشه‌ی چندجمله‌ای زیر است:

$$f(x) = (x-۱)(x-۲)(x-۲^۲)\dots(x-۲^n).$$

۲. (آ) فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$. ثابت کنید $\det(A^۲ + I) \geq ۰$.

(ب) $n$ یک عدد طبیعی فرد و $A$ ماتریسی مربعی از مرتبه‌ی $n$ و با درایه‌های حقیقی است. ثابت کنید که اگر $A^۲ = O$ یا $A^۲ = I$، آنگاه $\det(A+I) \geq \det(A-I)$.

۳. فرض کنید $n$ یک عدد طبیعی و $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ مجموعه‌هایی دلخواه باشند. ماتریس $P = [p_{ij}]_{n\times n}$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$p_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{باشد } A_j \text{ زیرمجموعه‌ی سره‌ی } A_i \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ثابت کنید ماتریس $P$ پوچ‌توان است.

۴. فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ ماتریسی وارون‌پذیر باشد. ثابت کنید:

$$\det A = \frac{۱}{n!}\begin{vmatrix} tr(A) & ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ tr(A^۲) & tr(A) & ۲ & ۰ & \cdots & ۰ \\ tr(A^۳) & tr(A^۲) & tr(A) & ۳ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ tr(A^{n-۱}) & tr(A^{n-۲}) & \cdots & & tr(A) & n-۱ \\ tr(A^n) & tr(A^{n-۱}) & tr(A^{n-۲}) & \cdots & & tr(A) \end{vmatrix}$$

۵. ثابت کنید دترمینان ماتریس زیر عددی صحیح است.

$$H = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \cdots & \frac{۱}{n} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} & \cdots & \frac{۱}{n+۱} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{۱}{n} & \frac{۱}{n+۱} & \frac{۱}{n+۲} & \frac{۱}{n+۳} & \cdots & \frac{۱}{۲n-۱} \end{bmatrix}$$

۶. همه‌ی اعداد اول $p$ را بیابید که دترمینان زیر بر $p^۳$ بخش‌پذیر باشد.

$$\begin{vmatrix} ۲^۲ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۳^۲ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۴^۲ & \cdots & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & (p+۷)^۲ \end{vmatrix}$$

۷. اگر $A \in M_2(\mathbb{R})$، ثابت کنید که ماتریس‌های $B, C \in M_2(\mathbb{R})$ وجود دارند به‌طوری که $A = B^2 + C^2$.

۸. فرض کنید $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ و داریم $AB = A^2 + B^2$. اگر $AB - BA$ وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید $n$ بر ۳ بخش‌پذیر است.