درس جبرخطی۱
نیم سال دوم ۱۳۹۸

تمرین تحویلی سری اول (امتیازی)

۱. فرض کنید $A \in M_n(F)$ و $1 \leq rank(A) = r \leq (n-1)$. نشان دهید ماتریس‌های $B_{n\times r}$ و $C_{r\times n}$ وجود دارند به‌طوری که $rank(B) = rank(C) = r$ و $A = BC$.

۲. نشان دهید برای هر دو ماتریس دلخواه $A_{n\times m}$ و $B_{m\times m}$ روی میدان F داریم:

$$rank \begin{bmatrix} I_n & A \\ O & B \end{bmatrix} = n + rank(B).$$

۳. منظور از پوش محدب مجموعه‌ی $u_1, u_2, ..., u_n \in \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ی $\{\sum t_i u_i : 0 \leq t_i \leq 1, \sum t_i = 1\}$ است. ثابت کنید هر مجموعه‌ی $n+2$عضوی مانند $\{v_1, ..., v_{n+2}\}$ از اعضای $\mathbb{R}^n$ را که در نظر بگیریم، می‌توان به دو مجموعه‌ی مجزا تقسیم کرد که پوش‌محدب آن دو مجموعه اشتراک داشته باشند.

۴. فرض کنید Fیک میدان نامتناهی باشد. ثابت کنید می‌توان ماتریس nدر بی نهایت پیدا کرد به‌طوری‌که هر nتایی از ستون های ماتریس را که در نظر بگیریم، ماتریس $n \times n$ حاصل، وارون‌پذیر باشد.