



آنالیز تابعی مقدماتی (۲۲۴۷۵۱)

تمرین سری ۶

بهار ۱۴۰۰-۰۱

دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی شریف

مدرس: جناب آقای دکتر فنایی

تاریخ تحویل: ۱۴۰۰/۱۲/۲۷

۱ پرسش اول

فرض کنید $\{c_n\} \in \ell^\infty$ باشد و برای دنباله‌ی $\{x_n\} \in \ell^2$ اپراتور $T \in B(\ell^2)$ را به صورت

$$T\{x_n\} = \{c_n x_n\}$$

تعریف کنید.

۱. T^* را محاسبه کنید.

۲. شرایط مناسبی روی $\{c_n\}$ بیابید به طوری که T خودالحاق شود.

۳. شرایط مناسبی روی $\{c_n\}$ بیابید به طوری که T یکانی شود.

۲ پرسش دوم

۱. \mathcal{H} فضای هیلبرت و Y زیرفضای بسته‌ی آن است. اگر $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ یک اپراتور خطی کران‌دار باشد و P عملگر تصویر متعامد روی زیرفضای Y باشد، نشان دهید

$$TP = PT$$

اگر و تنها اگر $T(Y) \subseteq Y$ و $T(Y^\perp) \subseteq Y^\perp$.

۲. اگر P_1 و P_2 دو عملگر تصویر باشند، نشان دهید $P = P_1 - P_2$ تصویری است اگر و تنها اگر $Im P_1 \subseteq Im P_2$. در این حالت $Im P$ را بر حسب $Im P_1$ و $Im P_2$ به دست آورید.

۳ پرسش سوم

اپراتور زیر را روی ℓ^1 در نظر بگیرید:

$$T : (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \mapsto (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \dots)$$

$\sigma(T)$ را توصیف کنید و اشتراکش با \mathbb{R} را به دست آورید.

۴ پرسش چهارم

فرض کنید $T \in B(H)$ اپراتوری نرمال باشد.

۱. نشان دهید $\ker T^*$ ، T -ناوردا است؛ به این معنی که برای هر $x \in \ker T$ ، $T^*x \in \ker T$.

۲. نشان دهید $(\ker T)^\perp$ ، T -ناوردا است.

۳. ثابت کنید برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $\ker T = \ker T^k$.

۵ پرسش پنجم

۱. فرض کنید \mathcal{H} یک فضای هیلبرت مختلط و $A_1, A_2 \in B(\mathcal{H})$ دو عملگر مثبت باشند. ثابت کنید A_1A_2 نیز مثبت است اگر و تنها اگر A_1 و A_2 جابه‌جا شوند. ($A_1A_2 = A_2A_1$)

۲. فرض کنید $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, A \in B(\mathcal{H})$ اپراتورهای مثبت باشند. نشان دهید اگر $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ آنگاه $\|\sqrt{A_n} - \sqrt{A}\| \rightarrow 0$.

۶ سوال امتیازی

فرض کنید \mathcal{X} یک فضای باناخ باشد و $S, T \in B(\mathcal{X})$. نشان دهید:

$$\{0\} \cup \sigma(ST) = \{0\} \cup \sigma(TS)$$