



آنالیز تابعی مقدماتی (۲۲۴۷۵۱)

تمرین سری ۵

بهار ۱۴۰۰-۰۱

دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی شریف

مدرس: جناب آقای دکتر فنایی

تاریخ تحویل: ۱۴۰۰/۰۳/۱۷

۱ مسئله اول

$(X, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ روی میدان \mathbb{R} است و C یک زیرمجموعه محدب شامل مبدا از این فضاست. قرار می‌دهیم (ممکن است p_C در نقاطی از X تعریف نشود):

$$p_C(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\} \quad x \in X$$

الف. مثالی ارائه دهید که C درون تهی داشته باشد ولی p_C در تمام نقاط تعریف شود و یک نرم روی فضای برداری X باشد

ب. شروط لازم و کافی برای مجموعه C بیابید که p_C یک (1) seminorm (۲) نرم و (۳) نرم معادل با $\|\cdot\|$ روی فضای برداری X باشد.

۲ مسئله دوم

نشان دهید در فضاهای l_p ($1 < p < \infty$) تابع نرم نسبت به توپولوژی ضعیف پیوسته نیست یعنی دنباله ای مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد که به x همگرای ضعیف است ولی $\|x_n\| \not\rightarrow \|x\|$. همچنین نتیجه بگیرید که این حکم برای هر فضای هیلبرت با بعد نامتناهی برقرار است.

۳ مسئله سوم

نشان دهید هر زیرمجموعه یک فضای باناخ که نسبت به توپولوژی ضعیف فشرده دنباله ای باشد، بسته و کراندار است. آیا عکس این مطلب صحیح است؟

۴ مسئله چهارم

X یک فضای متریک است و $C(X)$ فضای توابع حقیقی مقدار پیوسته با نرم سوپرنرم است. زیرمجموعه A از X را در نظر بگیرید. زیرمجموعه F_A از $(C(X))'$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_A = \{\phi_a \in (C(X))' : a \in A\} \quad , \quad \phi_a(f) := f(a) \quad (\forall f \in C(X))$$

نشان دهید F_A نسبت به توپولوژی ضعیف* فشرده دنباله ای است اگر و فقط اگر A در X فشرده باشد.

۵ مسئله پنجم

فرض کنید W زیرمجموعه ای از فضای نرم دار X است. نشان دهید: ${}^\circ(W^\circ) = \overline{\text{Span}(W)}$

۶ مسئله ششم

فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T \in B(X, Y)$ یک عملگر است و T' عملگر الحاقی آن است. نشان دهید:

$$\text{Im}(T) \subset {}^\circ(\ker(T')) \quad , \quad (\overline{\text{Im}(T)})^\circ = \ker(T')$$