آنالیز تابعی مقدماتی (۲۲۴۷۵۱)

تمرین سری ٤

بهار ۰۱–۱٤۰۰

دانشکدهٔ علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی شریف

مدرس: جناب آقای دکتر فنایی

تاریخ تحویل: ۱٤۰۱/۳/۳

قراردادها

- $(x_n)_n$ دنباله‌ای از نقاط مجموعهٔ X را نشان می‌دهد.
- $\mathbb{F}$ یکی از دو میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ را نشان می‌دهد.

۱ فضای پوچ تابعک‌های خطی

فرض کنید X یک فضای برداری و $\varphi : X \to \mathbb{F}$ تابعکی خطی باشد.

آ. اگر Y زیرفضایی از X باشد به طوری که $\operatorname{Ker}\varphi \subset Y$، ثابت کنید $Y = \operatorname{Ker}\varphi$ یا $Y = X$.

ب. فرض کنید $\psi : X \to \mathbb{F}$ نیز تابعکی خطی باشد به طوری که $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\psi$. ثابت کنید $\alpha \in \mathbb{F}$ وجود دارد به گونه‌ای که $\psi = \alpha\varphi$.

۲ تابعک‌های خطی کران‌دار

فرض کنید φ و ψ دو تابعک خطی کران‌دار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند به طوری که $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$. ثابت کنید حداقل یکی از φ یا ψ، ضریبی اسکالر از دیگری است.

۳ تابعک خطی ناصفر روی l^∞

نشان دهید تابعک ناصفری مانند $\varphi \in (l^\infty)'$ وجود دارد به طوری که

$$\varphi(e_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

سپس توضیح دهید چرا φ نمی‌تواند نمایشی به صورت

$$\varphi(x_1, x_2, \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j, \quad (a_n)_n \in l^1,$$

داشته باشد.

٤ زیرمجموعهٔ کران‌داری از فضا

فرض کنید X یک فضای برداری نُرم‌دار و A زیرمجموعه‌ای از آن باشد. اگر

$$\sup_{x\in A}|\varphi(x)| < \infty, \quad \varphi \in X',$$

به کمک اصل کران‌داری یکنواخت ثابت کنید:

$$\sup_{x\in A}\|x\| < \infty.$$

٥ جداسازی نقاط از زیرمجموعه‌ای محدب

فرض کنید X یک فضای برداری نُرم‌دار و B زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از آن باشد به طوری که

$$\alpha b \in B, \quad \alpha \in \{r \in \mathbb{F} : |r| \le 1\}.$$

اگر $x_0 \in X \setminus B$، نشان دهید $\varphi \in X'$ وجود دارد به گونه‌ای که هر دو ویژگی زیر را دارا باشد:

۱. به ازای هر $b \in B$، $|\varphi(b)| \le 1$.

۲. $\varphi(x_0)$ حقیقی باشد و $\varphi(x_0) > 1$.

٦ همگرایی ضعیف در فضای هیلبرت

فرض کنید $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت جدایی‌پذیری با پایهٔ یکامتعامد $(e_n)_n$ باشد. اگر $(x_n)_n$ دنباله‌ای کران‌دار از نقاط $\mathcal{H}$ باشد به گونه‌ای که حد

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, e_k\rangle, \quad k \in \mathbb{N},$$

همواره موجود است، نشان دهید دنبالهٔ $(x_n)_n$ همگرای ضعیف خواهد بود.

٧ نیم‌پیوستگی از پایین همگرایی ضعیف

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. نشان دهید:

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad \|x\| \le \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|.$$