آنالیز تابعی مقدماتی (۲۲۴۷۵۱)

تمرین سری ۳

بهار ۱۴۰۰-۰۱

دانشکده‌ی علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی شریف

مدرس: جناب آقای دکتر فنایی

تاریخ تحویل: ۱۶ اردیبهشت ۱۴۰۱

قراردادها

- $(x_n)_n$ دنباله‌ای از نقاط مجموعه‌ی X را نشان می‌دهد.
- c_0 فضای همه‌ی دنباله‌هایی در $\mathbb{F}$ است که همگرا به صفر هستند.

۱ مسأله‌ی اول

۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ یک نگاشت خطی متقارن باشد؛ به این معنی که

$$\forall x, y \in \mathcal{H}, \ \ \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

نشان دهید T یک نگاشت پیوسته است.

۲. فضاهای باناخ X, Y, Z را در نظر بگیرید. فرض کنید $T : X \to Y$ نگاشتی خطی، $J : Y \to Z$ نگاشتی خطی، یک‌به‌یک و کران‌دار و $J \circ T : X \to Z$ نیز نگاشتی کران‌دار باشد. نشان دهید T نیز کران‌دار است.

۳. فرض کنید $(X, ||.||_X)$ و $(Y, ||.||_Y)$ دو فضای باناخ باشند و $A : D_A \subseteq X \to Y$ و $B : D_B \subseteq X \to Y$ دو عملگر خطی باشند به‌طوری‌که $D_A \subseteq D_B$. با فرض این‌که ثوابت $0 \leq a < 1$ و $0 \leq b$ وجود دارند که

$$\forall x \in D_A : \ ||Bx||_Y \leq a||Ax||_Y + b||x||_X,$$

نشان دهید اگر گراف A بسته باشد، گراف $A + B : D_A \to Y$ هم بسته است.

۲ مسأله‌ی دوم

فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی کران‌دار باشد و Γ را به‌صورت

$$\Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y=f(x)\}$$

تعریف کنید.
نشان دهید f پیوسته است اگر و تنها اگر Γ بسته باشد. (توجه کنید که در این‌جا خودمان را تنها به نگاشت‌های خطی محدود نکرده‌ایم.)
آیا گزاره‌ی بالا در حالتی که نگاشت f کران‌دار نباشد نیز درست است؟

۳ مسأله‌ی سوم

فرض کنید X یک فضای باناخ و $A\subseteq X$ یک زیرمجموعه‌ی چگال باشد. آیا می‌توان تابع $f:X\to\mathbb{R}$ را به‌گونه‌ای یافت که برای هر $x\in A$، داشته باشیم $\lim\limits_{t\to x}|f(t)|=\infty$؟

۴ مسأله‌ی چهارم

۱. فرض کنید $x=(x_1,,x_2,\dots)=(x_i)_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعضای $\mathbb{F}$ باشد به‌طوری که $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_iy_i$ برای هر $y=(y_1,y_2,\dots)\in c_0$ همگرا باشد. نشان دهید $x\in\ell^1$.

۲. فرض کنید $a=(a_1,a_2,\dots)=(a_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعضای $\mathbb{F}$ باشد به‌گونه‌ای که برای هر

$$x=(x_1,x_2,\dots)=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c_0$$

داشته باشیم: $(a_nx_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c_0$. نشان دهید $a\in\ell^\infty$.