آنالیز تابعی مقدماتی (٢٢٤٧٥١)

تمرین سری ٢

بهار ٠١–١٤٠٠

دانشکدهٔ علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی شریف

مدرس: جناب آقای دکتر فنایی

تاریخ تحویل: ١٤٠١/٠١/٢٦

١ فضای متعامد

فضای هیلبرت $\mathcal{L}^2([-1,1])$ را در نظر بگیرید که H_1 زیرفضای آن است. در هر کدام از موارد زیر نشان دهید H_1 بسته است و $H_1^{\perp}$ را محاسبه نمایید. همچنین تجزیه تابع $f \in \mathcal{L}^2([-1,1])$ به زیر فضاهای مکمل H_1 و $H_1^{\perp}$ را به صورت صریح بیان کنید

الف. $H_1 = \{f \ : f(x) = 0 \ for \ a.e. \ x \in [0,1]\}$

ب. $H_1 = \{\text{توابع فرد}\}$

٢ پایه یکامتعامد

H یک فضای هیلبرت با پایه یکامتعامد $\{e_n\}_n$ است و $\{v_m\}_m$ یک دنباله یکامتعامد است. نشان دهید این دنباله یک پایه یکامتعامد تشکیل میدهد اگر و فقط اگر:

$$\forall n \ : \ \sum_{m=1}^{\infty} \langle v_m, e_n \rangle^2 = 1$$

٣ سری فوریه

الف. با توجه به قضیه ٥٤ از فصل سوم مرجع درس رابطه زیر را ثابت کنید :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2$$

که $\{a_n\}_n$ ضرایب سری فوریه مربوط به پایه معرفی شده در قضیه هستند.

ب. با در نظر گرفتن تابع $f(x) = x$ مقدار $\sum_{n \text{ فرد}} \frac{1}{n^4}$ را محاسبه کنید.

٤ کمترین فاصله

X فضای هیلبرت و Y یک زیرفضای متناهی بعد با پایه یکامتعامد $\{e_1, \ldots, e_n\}$ است. نشان دهید کمترین فاصله Y از $x \in X$ در نقطه $y = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_n \rangle e_n$ اخذ میشود.

۵ مثالی از فضای هیلبرت

$\eta : [0,1] \to \mathbb{R}$ تابعی اندازه پذیر است با این ویژگی که عدد مثبت c وجود دارد به طوری که $\forall x \in [0,1] \ : \ \eta(x) > c$. H_η را مجموعه تمام توابع اندازه پذیر f در نظر بگیرید که

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \eta(x) < \infty$$

همچنین تعریف میکنیم :

$$f, g \in H_\eta \ : \ \langle f, g \rangle_\eta := \int_0^1 f(x) g(x) \eta(x)$$

الف. ثابت کنید $(H_\eta, \langle \cdot, \cdot \rangle_\eta)$ فضای هیلبرت است.

ب. نشان دهید $H_\eta \subseteq \mathcal{L}^2([0,1])$. شرط لازم و کافی برای حالت تساوی بیابید.

۶ زیر مجموعه ای فشرده از l^2

اگر $\{b_n\}_n$ دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت باشد که $\sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2 < \infty$ در این صورت نشان دهید زیرمجموعه A از l^2 فشرده است :

$$A = \{\{a_n\}_n \ : \ |a_n| \le b_n\}$$