آنالیز تابعی مقدماتی (۲۲۴۷۵۱)

تمرین سری ۱

بهار ۰۱–۱۴۰۰

دانشکدهٔ علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی شریف

مدرس: جناب آقای دکتر فنایی

تاریخ تحویل: ۱۴۰۰/۱۲/۲۷

قراردادها

- $(x_n)_n$ دنباله‌ای از نقاط مجموعهٔ X را نشان می‌دهد.
- $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}[a,b]$ مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی و با دامنهٔ $[a,b]$ را نشان می‌دهد.

۱ مترها و نُرم‌ها

می‌دانیم در هر فضای برداری، نُرمی مانند $\|\cdot\|$ به طور طبیعی، متری را به صورت

$$d(x,y) = \|x-y\|, \tag{۱}$$

القا می‌نماید. آیا عکس این گزاره نیز برقرار است؟ به عبارت دیگر آیا در هر فضای برداری، متری مانند d، نُرمی را مانند $\|\cdot\|$ القا می‌نماید که در رابطهٔ (۱) صدق کند؟

۲ $\mathcal{L}^p$ و فضای اندازهٔ کران‌دار

فرض کنید (X,Σ,μ) یک فضای اندازهٔ کران‌دار باشد؛ یعنی $\mu(X) < \infty$. به علاوه فرض کنید $1 < p < q < \infty$. اگر $f \in \mathcal{L}^q(X)$، نشان دهید

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_q.$$

در نهایت نتیجه بگیرید $\mathcal{L}^q(X) \subset \mathcal{L}^p(X)$.

۳ حد نُرم‌های $\|\cdot\|_p$

فرض کنید $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید:

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

به بیان دقیق‌تر، ثابت کنید:

$$\lim_{p\to\infty} \Big(\int |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{p}} = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

۴ نُرم‌های معادل

فضای برداری $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}[0,1]$ را همراه با دو نُرم

$$\|p\|_1 := \int_0^1 |p(x)|\,\mathrm{d}x, \quad p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}[0,1],$$
$$\|p\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |p(x)|, \quad p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}[0,1],$$

در نظر بگیرید. نشان دهید این دو نُرم با یکدیگر معادل نمی‌باشند.

۵ زیرفضای برداری شامل یک گوی

فرض کنید Y یک زیرفضای برداری از فضای برداری نُرم‌دار $(X, \|\cdot\|)$ است و شامل گوی بازی از X می‌باشد. ثابت کنید $Y = X$.

۶ زیرفضاهای l^∞

فضای باناخ l^∞ را در نظر بگیرید. دربارهٔ کامل بودن هر یک از زیرفضاهای زیر از l^∞، با ذکر دلیل اظهار نظر نمایید:

الف. $\mathcal{F} = \{(x_n)_n \in l^\infty :$ تعداد محدودی عضو ناصفر دارد $(x_n)_n\}$

ب. $\mathcal{D} = \{\delta_n \in l^\infty :$ عضو n–ام دنبالهٔ δ_n، 1 و دیگر اعضای آن 0 می‌باشد$\}$

۷ سری تیلور و فضای چندجمله‌ای‌ها

فضای برداری نُرم‌دار $C[a,b]$ را با نُرم

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad f \in C[a,b],$$

در نظر بگیرید. می‌دانیم $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}[a,b]$ زیرفضایی از فضای $C[a,b]$ است. قضایای مربوط به همگرایی سری‌های توانی و سری تیلور توابع هموار، به ما اطمینان می‌دهند که $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}[a,b]$ یک فضای باناخ نیست. کارکرد این ایده را در قالب مثال زیر نشان می‌دهیم.

فرض کنید $[a,b] := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ و تابع $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ

$$f(x) := \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],$$

در نظر بگیرید.

الف. دنبالهٔ $(p_n)_n$ از اعضای $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ را به صورت

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} x^k, \quad \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],$$

تعریف می‌نماییم. به راحتی می‌توان نشان داد که دنبالهٔ $(p_n)_n$ در واقع همان دنبالهٔ چندجمله‌ای‌های تیلور تابع f حول $x = 0$ می‌باشد. نشان دهید $\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_\infty = 0$.

ب. با استفاده از نتیجهٔ قسمت قبل، توضیح دهید چرا $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ با نُرم $\|\cdot\|_\infty$، یک فضای باناخ نمی‌باشد.