



# نظریه زبان ها و اتوماتا

دکتر شهرام خزایی

بهار ۱۴۰۱

## تمرین سری چهار

زبان‌های مستقل از متن (۱)

مهلت تحویل: ساعت ۲۳:۵۹ روز ۹ اردیبهشت

### لطفاً پیش از پاسخ‌دادن به تمرین‌ها به نکات زیر توجه کنید:

- تمرین از دو بخش سوالات تحویلی و سوالات تکمیلی تشکیل شده است. توجه کنید که پاسخ‌دادن به سوالات تکمیلی نمره‌ی اضافه‌ای ندارد.
- ارسال سوال‌ها به فروم‌های اینترنتی و جست‌وجوی پاسخ آن‌ها در اینترنت مجاز نیست.
- می‌توانید با یکدیگر در حل سوالات مشورت کنید؛ اما باید اولاً راه‌حل‌تان را با بیان خودتان بنویسید و ثانیاً نام کسانی که با آن‌ها در حل سوال مشورت کرده‌اید را پیش از پاسخ‌تان به سوال ذکر کنید.
- در صورتی که در مورد تمرین‌ها سوالی و ابهامی داشتید پیشنهاد می‌شود از دستیاران بپرسید. در صورت تشخیص مشابهت در راه‌حل‌ها، با فرض عدم تخلف تصحیح صورت خواهد گرفت اما مستندات بدون اطلاع دانشجو به مراجع ذی‌صلاح جهت بررسی، تصمیم و اقدام ارسال خواهد شد.
- دقت لازم را در نوشتن اثبات‌ها و بیان ادعاها به خرج دهید. علی‌الاصول هر ادعایی که در پاسخ به تمرین‌ها می‌آورد باید با اثبات همراه باشد؛ مگر آن‌که آن گزاره‌ی مزبور در طول درس اثبات شده باشد و یا سوال صراحتاً گفته باشد که نیازی به اثبات نیست.
- برای مرتبط کردن بخش‌های مختلف یک اثبات، به جای استفاده از پیکان، از کلمات استفاده کنید. همچنین برای هر منظور از سورها  $(\forall, \exists)$  استفاده نکنید. پاسخ‌تان به سوالات باید همراه با توضیحات کافی باشد که مصحح بتواند راه‌حل شما را متوجه شود. متن کتاب مرجع را الگو قرار دهید و پاسخ‌تان را طوری بنویسید که هر کسی بتواند آن را دنبال کند و متوجه شود.
- پاسخ‌تان را در فایل‌ها با نام شماره دانشجوییتان در سامانه ابلود کنید. فرمت فایل ارسالی باید حتماً به صورت pdf باشد. اگر از پاسخ‌تان عکس می‌گیرید در نور مناسب این کار را بکنید و توجه کنید که تصویر واضح باشد. فایل ارسالی شما نباید نیاز به چرخاندن (rotation) داشته باشد. توجه کنید که پاسخ‌هایی که موارد قبل در آن رعایت نشده باشند یا ناخوانا و مخدوش باشند تصحیح نخواهند شد.



## تمرینات تحویلی

## سوال ۱

(اثبات) ۲۰ + ۱۵ + ۱۵ + ۱۵ + ۱۵ + ۱۵ نمره

برای هر یکی از زبان‌هایی که توصیف آن‌ها در ادامه آمده است گرامری مستقل از متن ارائه دهید که توصیفی از آن زبان باشند. یکی از موارد را به دلخواه خود انتخاب کرده و به‌طور دقیق اثبات کنید که چرا گرامر ارائه‌شده همان زبان را تولید می‌کند.

$$1. L = \{a^i b^j c^k : j \neq i + k\}$$

$$2. \mathcal{R} = 1^0(0+1)^*1^0 \text{ زبان متناظر با عبارت منظم}$$

$$3. L = \{a^i b^j c^k : i + 2j = 3k\}$$

$$4. L = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\} \text{ مکمل زبان}$$

5. مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌های عضو  $\{a, b\}^*$  که متقارن نیستند. (رشته‌ی  $w$  متقارن است هرگاه  $w = w^r$ ).

## سوال ۲

(۳۰ نمره)

فرض کنید  $L \subseteq \Sigma^*$  زبانی مستقل از متن باشد. تعریف نگاشت جانشینی را از بخش ۴ سوال ۱ تمرین سری دو به یاد بیاورید. نشان دهید اگر در نگاشت جانشینی  $\gamma: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ ،  $s$  برای هر  $\sigma \in \Sigma$ ،  $L_\sigma \subseteq \Delta^*$  زبانی مستقل از متن باشد،  $s(L)$  نیز زبانی مستقل از متن است.

## سوال ۳

(۱۵ + ۱۰ نمره)

الفبای  $\Sigma = \{1, =, +\}$  را در نظر بگیرید. زبان  $ADD$  را به‌صورتی که در ادامه آمده است تعریف می‌کنیم:

$$ADD = \{1^m + 1^n = 1^{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

برای مثال، رشته‌های  $1111 = 1 + 111$  و  $1 = 1 + 1111$  عضو زبان  $ADD$  هستند اما  $11 = 1 + 11$  عضو این زبان نیست.

۱. آیا زبان  $ADD$  منظم است؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۲. گرامر مستقل از متنی برای این زبان ارائه دهید. (نیازی به اثبات نیست).



## تمرینات تکمیلی

## سوال ۱

دو گرامر مستقل از متن زیر را در نظر بگیرید:

$$G_1 = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \rightarrow abB \mid AaA, B \rightarrow AA \mid \epsilon\}, A)$$

$$G_2 = (\{S, T\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow bS \mid Ta, T \rightarrow SaTb \mid Tba\}, S)$$

گرامر مستقل از متنی بسازید که زبان آن برابر با:

$$L(G_1) \cup L(G_2) \quad (\text{آ})$$

$$L(G_1) \cdot L(G_2) \quad (\text{ب})$$

$$L(G_1)^* \cdot L(G_2)^* \quad (\text{پ})$$

باشد.

## سوال ۲

نشان دهید زبان زیر مستقل از متن است:

$$L = \{0, 1\}^* \setminus \{(0^m 1^m)^n \mid m, n \geq 1\}$$

## سوال ۳

برای هر یک از زبان‌های زیر گرامر مستقل از متن نامبهم ارائه دهید و درستی جواب خود را اثبات کنید. در تمامی موارد الفبا برابر با  $\Sigma = \{a, b\}$  است.

$$\text{آ)} L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid n_a \geq n_b, w \text{ در هر پیش‌وند از } n_a \geq n_b\}$$

$$\text{ب)} L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$$

$$\text{پ)} L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid n_a(w) \geq n_b(w)\}$$

## سوال ۴

برای زبان زیر گرامر مستقل از متن ارائه دهید:

$$\Sigma = \{a, b, c\}, L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ یا } j = k, i, j, k \geq 0\}$$

آیا گرامری که ارائه داده‌اید مبهم است؟ چرا؟

## سوال ۵

برای هر یک از گرامرهای مستقل از متن زیر مانند  $G$ ، یک  $NFA$  بسازید که  $L(G)$  را بپذیرد. (نیازی به ارائه‌ی اثبات برای درستی پاسخ نیست.)

$$\text{آ)} G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow baS \mid bS \mid \epsilon\}, S)$$

$$\text{ب)} G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow Sab \mid Sb \mid ab \mid b\}, S)$$

$$\text{پ)} G_3 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow A \mid B, A \rightarrow baA \mid bA \mid \epsilon\}, S)$$



$$B \rightarrow Bab | Bb | ab | b, S)$$

ت)  $G_4 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow AB, A \rightarrow baA | bA | \epsilon,$

$$B \rightarrow Bab | Bb | ab | b\}, S)$$

ث)  $G_5 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow AA | BB, A \rightarrow baA | bA | \epsilon,$

$$B \rightarrow Bab | Bb | ab | b\}, S)$$

## سوال ۶

برای هر یک از زبان‌های منظم زیر، یک گرامر مستقل از متن ارائه دهید که آن را تولید کند. (نیازی به ارائه‌ی اثبات برای درستی پاسخ نیست.)

آ)  $\Sigma_1 = \{0, 1\}, R_1 = 1^0(0+1)^*1^0, L_1 = L(R_1)$

ب)  $\Sigma_2 = \{0, 1\}, R_2 = ((0+11)^*1^0)^*, L_2 = L(R_2)$

پ)  $\Sigma_3 = \{0, 1\}, L_3 = \{w \in \Sigma_3^* \mid w \text{ را ندارد. } 000\}$