دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

نظریه زبان ها و اتوماتا

دکتر شهرام خزایی

بهار ۱۴۰۱

تمرین سری سه

زبان‌های منظم (۴)

مهلت تحویل: ساعت ۲۳:۵۹ روز ۲۷ فروردین

لطفا پیش از پاسخ‌دادن به تمرین‌ها به نکات زیر توجه کنید:

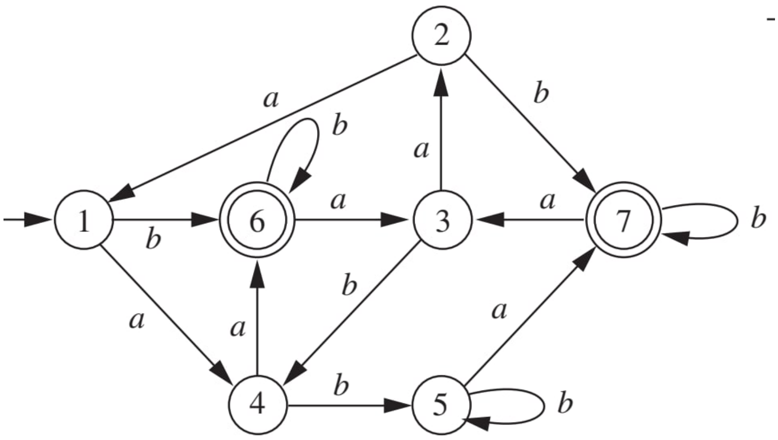
- تمرین از دو بخش سوالات تحویلی و سوالات تکمیلی تشکیل شده است. توجه کنید که پاسخ‌دادن به سوالات تکمیلی نمره‌ی اضافه‌ای ندارد.
- ارسال سوال‌ها به فروم‌های اینترنتی و جست‌وجوی پاسخ آن‌ها در اینترنت مجاز نیست.
- می‌توانید با یکدیگر در حل سوالات مشورت کنید؛ اما باید اولاً راه‌حلتان را با بیان خودتان بنویسید و ثانیاً نام کسانی که با آن‌ها در حل سوال مشورت کرده‌اید را پیش از پاسختان به سوال ذکر کنید.
- در صورتی که در مورد تمرین‌ها سوالی و ابهامی داشتید پیشنهاد می‌شود از دستیاران بپرسید. در صورت تشخیص مشابهت در راه‌حل‌ها، با فرض عدم تخلف تصحیح صورت خواهد گرفت اما مستندات بدون اطلاع دانشجو به مراجع ذی‌صلاح جهت بررسی، تصمیم و اقدام ارسال خواهد شد.
- دقت لازم را در نوشتن اثبات‌ها و بیان ادعاها به‌خرج دهید. علی‌الاصول هر ادعایی که در پاسخ به تمرین‌ها می‌آورید باید با اثبات همراه باشد؛ مگر آن‌که آن گزاره‌ی مزبور در طول درس اثبات شده باشد و یا سوال صراحتاً گفته باشد که نیازی به اثبات نیست.
- برای مرتبط کردن بخش‌های مختلف یک اثبات، به‌جای استفاده از پیکان، از کلمات استفاده کنید. همچنین برای هر منظور از سورها ($\forall, \exists$) استفاده نکنید. پاسختان به سوالات باید همراه با توضیحات کافی باشد که مصحح بتواند راه‌حل شما را متوجه شود. متن کتاب مرجع را الگو قرار دهید و پاسختان را طوری بنویسید که هر کسی بتواند آن را دنبال کند و متوجه شود.
- پاسختان را در فایلی با نام شماره دانشجوییتان در سامانه اپلود کنید. فرمت فایل ارسالی باید حتما به‌صورت **pdf.** باشد. اگر از پاسختان عکس می‌گیرید در نور مناسب این‌کار را بکنید و توجه کنید که تصویر واضح باشد. فایل ارسالی شما نباید نیاز به چرخاندن (rotatation) داشته باشد. توجه کنید که پاسخ‌هایی که موارد قبل در آن رعایت نشده باشند یا ناخوانا و مخدوش باشند تصحیح نخواهند شد.

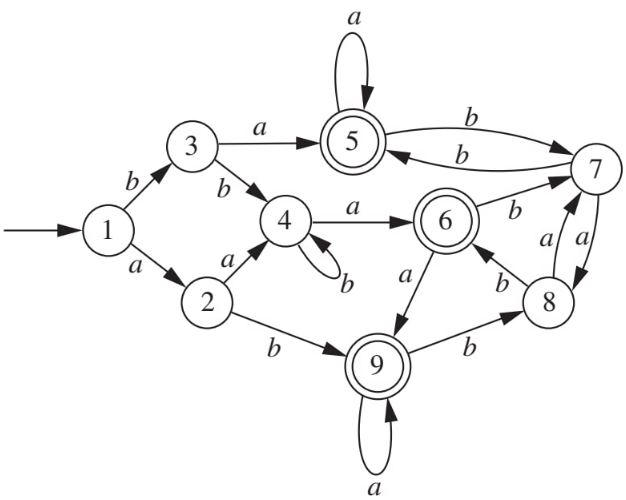
تمرینات تحویلی

سوال ۱

(۳۰ نمره)

DFA مینیمال معادل با دو DFA زیر را به‌دست آورید.





سوال ۲

(۶۰ نمره)

فرض کنید $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ و $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$ دو DFA باشند و $i : Q_1 \to Q_2$ نگاشتی دوسویی (یک‌به‌یک و پوشا) باشد. می‌گوییم i یک ایزومورفیسم بین $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ است هرگاه شروط زیر برآورده شوند:

۱. $i(q_0) = p_0$.

۲. برای هر $q \in Q_1$، $i(q) \in F_2$ اگر و تنها اگر $q \in F_1$.

۳. برای هر $q \in Q_1$ و $\sigma \in \Sigma$، $i(\delta_1(q, \sigma)) = \delta_2(i(q), \sigma)$.

و می‌گوییم $\mathcal{M}_1$ با $\mathcal{M}_2$ ایزومورفیک است هرگاه ایزومورفیسمی بین آن‌دو موجود باشد.
فرض کنید $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ دو DFA باشند که زبان L را می‌پذیرند و هر دو کمترین تعداد حالت‌های ممکن را داشته باشند. نشان دهید $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ ایزومورفیک هستند.
(راهنمایی: اگر از اثبات قضیه‌ی minimization به‌خاطر بیاورید، در حالتی که یک DFA مینیمال باشد،

$$\{L_q \ : \ q \in Q\}$$

که در آن، $L_q = \{x \in \Sigma^* \ : \ \hat{\delta}(q_0, x) = q\}$، همان مجموعه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی تمایزناپذیری نسبت به L خواهد بود. توجه به این مطلب، برای شما روشن خواهد کرد که چگونه باید ایزومورفیسم بین $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ را تعریف کنید.)

سوال ۳

(۳۰ + ۳۰ نمره)
منظور از یک گرامر خطی راست، چهارتایی $G = \langle T, V, S, R \rangle$ است که در آن:

- T مجموعه‌ای متناهی از ترمینال‌هاست.
- V مجموعه‌ای متناهی از متغیرهاست.
- $S \in V$ متغیر شروع است.
- R مجموعه‌ای متناهی از قواعد است که هر کدام به یکی از دو صورت $A \to x$ و $A \to xB$ می‌باشند که در آن، $A, B \in V$ و $x \in T$.

نشان دهید که زبان L منظم است، اگر و تنها اگر یک گرامر خطی راست مانند G وجود داشته باشد به‌نحوی که $L(G) = L$.

تمرینات تکمیلی

سوال ۱

رتبه‌ی زبان منظم L کوچک‌ترین عدد صحیحی‌ست که برای آن داریم:

$$L^k = L^{k+1}$$

اگر چنین عدد صحیحی وجود نداشته باشد رتبه را ∞ در نظر می‌گیریم.

آ) نشان دهید رتبه‌ی زبان منظم L ($L \neq \emptyset$) متناهی است اگر و تنها اگر عدد صحیحی مانند k وجود داشته باشد به طوری که $L^k = L^*$ و در این حالت رتبه‌ی L کوچک‌ترین k با خاصیت مذکور است.
ب) رتبه‌ی زبان $\{\epsilon\} \cup \{aa\}\{aaa\}^*$ را محاسبه کرده و ادعای خود را اثبات کنید.

سوال ۲

در طول درس، با الگوریتمی برای minimization یک DFA آشنا شدید. هدف از این تمرین، آشنایی با الگوریتم دیگری برای این کار است.
فرض کنید $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ یک DFA باشد که مجموعه‌ی حالت‌های آن Q، الفبای ورودی آن Σ، تابع انتقال آن δ و حالت شروع و مجموعه‌ی حالت‌های پذیرش آن به‌ترتیب q_0 و F هستند. ماشین $\mathcal{M}^r$ را به این‌صورت تعریف می‌کنیم که ماشینی باشد که از معکوس‌کردن جهت یال‌های گراف انتقال حالت $\mathcal{M}$ به‌دست می‌آید. به بیان دقیق‌تر، $\mathcal{M}^r = (Q, \Sigma, \delta^r, F, \{q_0\})$ به‌طوری که δ^r به‌صورت

$$\delta^r(p, \sigma) = \{q \in Q \ : \ \delta(q, \sigma) = p\}$$

تعریف شده‌است.

۱. توضیح دهید که چرا $\mathcal{M}^r$ یک NFA نیست.

۲. با وجود آن‌که $\mathcal{M}$ یک NFA نیست، می‌توان آن را یک NFA تعمیم‌یافته دانست. پذیرش یک رشته توسط چنین NFA تعمیم‌یافته‌ای را به‌طور مناسبی تعریف کنید.

۳. مشابه NFAها، می‌توانیم الگوریتم subset construction را روی چنین NFAهای تعمیم‌یافته‌ای به‌کار گیریم و یک DFA معادل به‌دست آوریم. حالت شروع این DFA معادل چگونه باید تعریف شود؟

۴. فرض کنید برای یک NFA تعمیم‌یافته‌ی $\mathcal{A}$، $S(\mathcal{A})$ را این‌گونه تعریف کنید که DFA معادلی باشد که از انجام subset construction روی NFA تعمیم‌یافته‌ی $\mathcal{A}$ به‌صورت فوق به‌دست می‌آید، به‌طوری که حالت‌های غیرقابل دسترس آن از حالت شروع، حذف شده‌اند. نشان دهید:

(آ) اگر $\mathcal{M}^r = (Q, \Sigma, \delta^r, q_0, F)$، DFAای باشد که زبان L را می‌پذیرد، و هر حالت $q \in Q$ از q_0 قابل دسترس باشد، آن‌گاه $\mathcal{N} = S(\mathcal{M}^r)$ یک DFA مینیمال برای L^r است.

(ب) $S((S(\mathcal{M}^r))^r)$ یک DFA مینیمال برای L است.

سوال ۳

زبان هر یک از گرامرهای مستقل از متن زیر را توصیف کرده و ادعای خود را اثبات کنید. (در تمامی موارد مجموعه‌ی ترمینال‌ها برابر با $\Sigma = \{a, b\}$، مجموعه‌ی متغیرها برابر با $V = \{S\}$ و S متغیر شروع است.)

آ) $S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b$
ب) $S \to aS \mid bS \mid \epsilon$
پ) $S \to aS \mid Sb \mid a$
ت) $S \to SS \mid a \mid b$
ث) $S \to SS \mid aSb \mid \epsilon$
ج) $S \to aS \mid aSbS \mid \epsilon$
چ) $S \to SS \mid aSb \mid bSa \mid \epsilon$

سوال ۴

G یک گرامر مستقل از متن با تعریف زیر است:

$$G = (\{S, T\}, \{a, b\}, \{S \to aS \mid bT \mid a,\ T \to bT \mid b\}, S)$$

نشان دهید هیچ رشته‌ای در $L(G)$ وجود ندارد که زیررشته‌ی ba را دارا باشد.

سوال ۵

G یک گرامر مستقل از متن با تعریف زیر است:

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to Sa \mid bSS \mid SSb \mid SbS \mid a\}, S)$$

نشان دهید:

$$\forall w \in L(G) :\ n_a(w) > n_b(w)$$