



نظریه زبان ها و اتوماتا

دکتر شهرام خزایی

بهار ۱۴۰۱

تمرین سری دو

زبان‌های منظم (۳)

مهلت تحویل: ساعت ۲۳:۵۹ روز ۱۴ فروردین

لطفاً پیش از پاسخ‌دادن به تمرین‌ها به نکات زیر توجه کنید:

- تمرین از دو بخش سوالات تحویلی و سوالات تکمیلی تشکیل شده است. توجه کنید که پاسخ‌دادن به سوالات تکمیلی نمره‌ی اضافه‌ای ندارد.
- ارسال سوال‌ها به فروم‌های اینترنتی و جست‌وجوی پاسخ آن‌ها در اینترنت مجاز نیست.
- می‌توانید با یکدیگر در حل سوالات مشورت کنید؛ اما باید اولاً راه‌حل‌تان را با بیان خودتان بنویسید و ثانیاً نام کسانی که با آن‌ها در حل سوال مشورت کرده‌اید را پیش از پاسخ‌تان به سوال ذکر کنید.
- در صورتی که در مورد تمرین‌ها سوالی و ابهامی داشتید پیشنهاد می‌شود از دستیاران پرسید. در صورت تشخیص مشابهت در راه‌حل‌ها، با فرض عدم تخلف تصحیح صورت خواهد گرفت اما مستندات بدون اطلاع دانشجو به مراجع ذی‌صلاح جهت بررسی، تصمیم و اقدام ارسال خواهد شد.
- دقت لازم را در نوشتن اثبات‌ها و بیان ادعاها به‌خرج دهید. علی‌الاصول هر ادعایی که در پاسخ به تمرین‌ها می‌آوردید باید با اثبات همراه باشد؛ مگر آن‌که آن گزاره‌ی مزبور در طول درس اثبات شده باشد و یا سوال صراحتاً گفته باشد که نیازی به اثبات نیست.
- برای مرتبط کردن بخش‌های مختلف یک اثبات، به‌جای استفاده از پیکان، از کلمات استفاده کنید. همچنین برای هر منظور از سورها (\forall, \exists) استفاده نکنید. پاسخ‌تان به سوالات باید همراه با توضیحات کافی باشد که مصحح بتواند راه‌حل شما را متوجه شود. متن کتاب مرجع را الگو قرار دهید و پاسخ‌تان را طوری بنویسید که هر کسی بتواند آن را دنبال کند و متوجه شود.
- پاسخ‌تان را در فایل‌ها با نام شماره دانشجوییتان در سامانه ابلود کنید. فرمت فایل ارسالی باید حتماً به‌صورت pdf باشد. اگر از پاسخ‌تان عکس می‌گیرید در نور مناسب این‌کار را بکنید و توجه کنید که تصویر واضح باشد. فایل ارسالی شما نباید نیاز به چرخاندن (rotation) داشته باشد. توجه کنید که پاسخ‌هایی که موارد قبل در آن رعایت نشده باشند یا ناخوانا و مخدوش باشند تصحیح نخواهند شد.



تمرینات تحویلی

سوال ۱ (خواص بستاری زبان‌های منظم)

(۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ نمره)

۱. نشان دهید اگر \mathcal{L} یک زبان منظم باشد،

$$\mathcal{L}' = \{yx : x, y \in \Sigma^*, xy \in \mathcal{L}\}$$

نیز منظم است.

۲. نشان دهید اگر \mathcal{L} یک زبان منظم باشد، \mathcal{L}_{\neq} که به صورت زیر تعریف شده است نیز منظم است.

$$\mathcal{L}_{\neq} = \{x \in \Sigma^* : \exists y \in \Sigma^* (|x| = |y|, xy \in \mathcal{L})\}$$

۳. فرض کنید $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ و $\circ \in \Sigma$. زبان $rtz(\mathcal{L})$ را به صورت

$$rtz(\mathcal{L}) = \{x \in \Sigma^*(\Sigma - \{\circ\}) \cup \{\epsilon\} : \exists i \geq 0 (x \circ^i \in \mathcal{L})\}$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید اگر \mathcal{L} منظم باشد، $rtz(\mathcal{L})$ نیز منظم است.۴. منظور از یک جانشینی، نگاشتی مانند $\Delta^* \rightarrow \Sigma^*$ است که هر $\sigma \in \Sigma$ را به زبانی مانند $L_\sigma \subseteq \Delta^*$ می‌نگارد، به طوری که برای هر $x, y \in \Sigma^*$ داریم:

$$s(xy) = s(x)s(y)$$

(منظور از Δ^* مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های Δ^* است. همچنین توجه کنید که در تساوی بالا، عملگر بین x و y در سمت چپ تساوی، $concatenation$ دو رشته و عملگر بین $s(x)$ و $s(y)$ در سمت راست تساوی، $concatenation$ زبان است.)نشان دهید اگر برای هر $\sigma \in \Sigma$ ، $L_\sigma \subseteq \Delta^*$ زبانی منظم باشد، و $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ نیز یک زبان منظم باشد، $s(\mathcal{L}) = \bigcup_{x \in \mathcal{L}} s(x)$ نیز منظم خواهد بود.

سوال ۲

(۱۰ + ۱۰ + ۱۰ نمره)

غیرمنظم بودن هر یک از زبان‌های زیر را ثابت کنید.

آ) $\Sigma = \{\circ, 1\}$, $L_1 = \{\circ^n 1 \circ^m 1 \circ^p 1 \circ^q : m, n, p \geq 1, q \equiv nm \pmod{p}\}$ ب) $\Sigma = \{\circ, 1, 2\}$, $L_2 = \{w \in \Sigma^* : w \text{ بسط یک عدد طبیعی به فرم } 2^n \text{ در مبنای } 3 \text{ است}\}$ برای قسمت بعد، الفبای Σ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

در واقع Σ شامل همه‌ی ستون‌های ۳ تایی از \circ و ۱ است و هر رشته متشکل از این الفبا را می‌توانیم به صورت سه ردیف از رشته‌هایی متشکل از \circ و ۱ (که هر ردیف آن معادلاً بسط دودویی یک عدد طبیعی است) ببینیم. (توجه کنید که بیت سمت چپ MSB است.)پ) $L_3 = \{w \in \Sigma^* : w \text{ ردیف سوم } w, \text{ حاصلضرب دو ردیف بالایی آن است}\}$



تمرینات تکمیلی

سوال ۱

ϵ -NFA ای مانند \mathcal{N} را در نظر بگیرید. یک الگوریتم تصمیم‌گیر ارائه دهید که مسأله‌ی

”برای رشته‌ی ورودی x ، آیا $x \in L(\mathcal{N})$ ؟“

را در زمان $O(|x|)$ حل کند.

سوال ۲

عبارت منظم معادل با هر یک از زبان‌های زیر را بیابید.

۱. زبان رشته‌هایی که تعداد a در آن‌ها فرد است. (الفبای $\{a, b\}$)
۲. زبان رشته‌هایی که با b تمام شده و شامل aa نمی‌باشند. (الفبای $\{a, b\}$)
۳. زبان رشته‌هایی که تعداد a ها و تعداد b ها در آن‌ها زوج است. (الفبای $\{a, b\}$)
۴. زبان رشته‌هایی که حداقل یک a و حداقل یک b دارند. (الفبای $\{a, b, c\}$)
۵. زبان رشته‌هایی که هر دو \circ مجاور پیش از هر دو \circ مجاور ظاهر شده است. برای مثال رشته‌ی زیر

۱۰۰۰۰۱۰۱۰۱۰۱۱۱۰۱۱۱۱۰

عضوی از این زبان است. (الفبای $\{\circ, 1\}$)

۶. زبان رشته‌هایی که شامل 11 نیستند. (الفبای $\{\circ, 1\}$)
۷. زبان رشته‌هایی که شامل حداقل دو \circ هستند ولی شامل هیچ دو \circ مجاوری نیستند. (الفبای $\{\circ, 1\}$)
۸. زبان رشته‌هایی که طول آن‌ها بیش از ۳ بوده و همواره سومین حرف در آن‌ها \circ است. (الفبای $\{\circ, 1\}$)
۹. زبان رشته‌هایی که تعداد \circ ها در آن‌ها مضربی از ۳ می‌باشد. (الفبای $\{\circ, 1\}$)
۱۰. زبان رشته‌هایی که حرف اول و آخر در آن‌ها یکی است. (الفبای $\{\circ, 1\}$)
۱۱. زبان رشته‌هایی که طول فرد دارند. (الفبای $\{\circ, 1\}$)
۱۲. زبان رشته‌هایی که با \circ شروع شده و طول فرد دارند، یا با 1 شروع شده و طول زوج دارند. (الفبای $\{\circ, 1\}$)
۱۳. زبان رشته‌هایی که با aa تمام نمی‌شوند. (الفبای $\{a, b\}$)
۱۴. زبان رشته‌هایی که هر کدام حداکثر از دو حرف متمایز ساخته شده‌اند. برای مثال $abab$ و $caaca$ از دو حرف متمایز ساخته شده‌اند و عضوی از این زبانند ولی به روشنی $abcba$ عضوی از این زبان نیست. (الفبای $\{a, b, c\}$)

سوال ۳

برای هر یک از زبان‌های زیر عبارت منظم معادل را بیابید.

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 0\} \\ L_2 &= \{a^n b^m : n \geq 3, m \text{ is even}\} \\ L_3 &= \{a^n b^m : (n+m) \text{ is even}\} \\ L_4 &= \overline{L_2} \end{aligned}$$



سوال ۴

عبارت‌های منظم زیر چه زبان‌هایی را توصیف می‌کنند؟

۱. $(\emptyset^*)^*$

۲. $a\emptyset$

سوال ۵

برای هر یک از عبارت‌های منظم زیر دو رشته که عضوی از زبان این عبارت‌ها هستند و دو رشته که عضو زبان آن‌ها نیستند مثال بزنید.

۱. $a(ba)^*b$

۲. $a^* + b^*$

۳. $\Sigma^*a\Sigma^*b\Sigma^*a\Sigma^*$

۴. $(\epsilon + a)b$

۵. $(a + ba + bb)\Sigma^*$

۶. $(\circ^*\circ)(\circ + 1)(\circ^*\circ)$

۷. $\circ^*1\circ^*1\circ^*1\circ^*$

۸. $\circ^*(1\circ\circ^*)^*1^*$

۹. $(\circ + 1\circ)^*1(1 + 1\circ)^*$

۱۰. $\Sigma\Sigma\circ\Sigma^*$

۱۱. $(\circ + (1\circ)^*)^*1^*$

۱۲. $(\epsilon + \Sigma)(\epsilon + \Sigma)(\epsilon + \Sigma)(\epsilon + \Sigma)(\epsilon + \Sigma)$

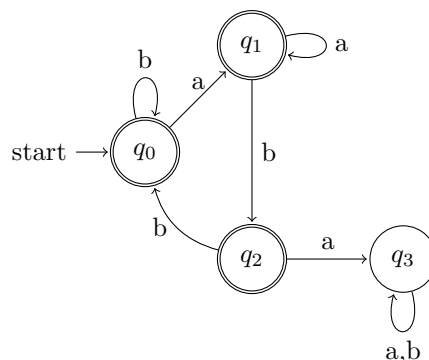
۱۳. $\Sigma^*\circ\Sigma^* + 1111\Sigma^* + 1 + \epsilon$

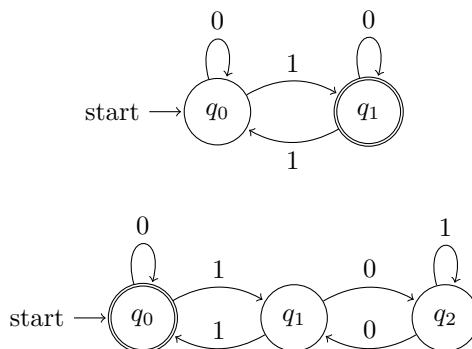
۱۴. $(1\Sigma)^*(1 + \epsilon)$

۱۵. $\circ^*(1\circ\circ + \circ1\circ + \circ\circ1)\circ^*$

سوال ۶

برای DFA متناظر هر یک از گراف‌های انتقال زیر عبارت منظم معادل را به دست بیاورید.





سوال ۷

برای زبان دل خواه L روی الفبای Σ و رشته‌ی $x \in \Sigma^*$ فرض کنید $put(L, x)$ مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌هایی مانند w باشد، به نحوی که w از درج x در رشته‌ی $w' \in L$ در یک موقعیت دل خواه به دست آمده باشد. به طور دقیق‌تر تعریف می‌کنیم:

$$put(L, x) = \{\alpha x \beta : \alpha \beta \in L\}$$

برای مثال اگر

$$L = \{۲۲۸۷۳\}$$

$$x = Automata$$

آن‌گاه داریم

$$put(L, x) = \{Automata۲۲۸۷۳, ۲Automata۲۸۷۳, ۲۲Automata۸۷۳, ۲۲۸Automata۷۳, ۲۲۸۷Automata۳, ۲۲۸۷۳Automata\}$$

حال فرض کنید L یک زبان منظم است. با این فرض به سوالات زیر پاسخ مناسب دهید.

- برای حالت‌های پایه‌ی $r = \emptyset$ و $r = \epsilon$ و $r = a, a \in \Sigma$ ، عبارت منظم $put(L(r), x)$ را بنویسید.
- فرض کنید $r = r_1 + r_2$ و r'_1 و r'_2 به ترتیب عبارت منظم $put(L(r_1), x)$ و عبارت منظم $put(L(r_2), x)$ باشند. حال به کمک x, r_1, r_2, r'_1, r'_2 عبارت منظم $put(L(r), x)$ را بنویسید.
- فرض کنید $r = r_1 r_2$ و r'_1 و r'_2 به ترتیب عبارت منظم $put(L(r_1), x)$ و عبارت منظم $put(L(r_2), x)$ باشند. حال به کمک x, r_1, r_2, r'_1, r'_2 عبارت منظم $put(L(r), x)$ را بنویسید.
- فرض کنید $r = r_1^*$ و r'_1 عبارت منظم $put(L(r_1), x)$ باشد. حال به کمک x, r, r'_1 عبارت منظم $put(L(r), x)$ را بنویسید.