دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

نظریه زبان ها و اتوماتا

دکتر شهرام خزایی

بهار ۱۴۰۱

تمرین سری یک

زبان‌های منظم (۲)

مهلت تحویل: ساعت ۲۳:۵۹ روز ۲۶ اسفند

لطفا پیش از پاسخ‌دادن به تمرین‌ها به نکات زیر توجه کنید:

- تمرین از دو بخش سوالات تحویلی و سوالات تکمیلی تشکیل شده است. توجه کنید که پاسخ‌دادن به سوالات تکمیلی نمره‌ی اضافه‌ای ندارد.
- ارسال سوال‌ها به فروم‌های اینترنتی و جست‌وجوی پاسخ آن‌ها در اینترنت مجاز نیست.
- می‌توانید با یکدیگر در حل سوالات مشورت کنید؛ اما باید اولاً راه‌حلتان را با بیان خودتان بنویسید و ثانیاً نام کسانی که با آن‌ها در حل سوال مشورت کرده‌اید را پیش از پاسختان به سوال ذکر کنید.
- در صورتی که در مورد تمرین‌ها سوالی و ابهامی داشتید پیشنهاد می‌شود از دستیاران بپرسید. در صورت تشخیص مشابهت در راه‌حل‌ها، با فرض عدم تخلف تصحیح صورت خواهد گرفت اما مستندات بدون اطلاع دانشجو به مراجع ذی‌صلاح جهت بررسی، تصمیم و اقدام ارسال خواهد شد.
- دقت لازم را در نوشتن اثبات‌ها و بیان ادعاها به‌خرج دهید. علی‌الاصول هر ادعایی که در پاسخ به تمرین‌ها می‌آورید باید با اثبات همراه باشد؛ مگر آن‌که آن گزاره‌ی مزبور در طول درس اثبات شده باشد و یا سوال صراحتاً گفته باشد که نیازی به اثبات نیست.
- برای مرتبط کردن بخش‌های مختلف یک اثبات، به‌جای استفاده از پیکان، از کلمات استفاده کنید. همچنین برای هر منظور از سورها ($\forall, \exists$) استفاده نکنید. پاسختان به سوالات باید همراه با توضیحات کافی باشد که مصحح بتواند راه‌حل شما را متوجه شود. متن کتاب مرجع را الگو قرار دهید و پاسختان را طوری بنویسید که هر کسی بتواند آن را دنبال کند و متوجه شود.
- پاسختان را در فایلی با نام شماره دانشجوییتان در سامانه اپلود کنید. فرمت فایل ارسالی باید حتما به‌صورت **pdf.** باشد. اگر از پاسختان عکس می‌گیرید در نور مناسب این‌کار را بکنید و توجه کنید که تصویر واضح باشد. فایل ارسالی شما نباید نیاز به چرخاندن (rotatation) داشته باشد. توجه کنید که پاسخ‌هایی که موارد قبل در آن رعایت نشده باشند یا ناخوانا و مخدوش باشند تصحیح نخواهند شد.

تمرینات تحویلی

سوال ۱

(۵۰ نمره)

فاصله‌ی همینگ بین دو رشته‌ی هم‌طول x و y که آن را با $H(x,y)$ نمایش می‌دهیم، تعداد اندیس‌هایی در x و y است که کاراکترهای نظیر آن اندیس‌ها در x و y متفاوتند. برای مثال، $H(۱۱۰۱۱۱۱, ۰۰۰۱۱۱۱) = ۲$.
برای هر زبان L، عملگر N را به این‌صورت تعریف می‌کنیم که:

$$N(L) = \{w \in \{۰,۱\}^* : \exists x \in L \; H(w,x) \leq ۱\}$$

نشان دهید که اگر L یک زبان منظم باشد، $N(L)$ نیز منظم است.

سوال ۲

(۲۰ + ۲۰ + ۲۰ نمره)

الف) الگوریتمی ارائه دهید که با دریافت یک گراف جهت‌دار، اگر گراف دور داشته باشد خروجی Yes دهد و اگر گراف دور نداشته باشد، خروجی No دهد (چنین الگوریتم‌هایی را تصمیم‌گیر می‌گوییم.)
ب) درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را تعیین کنید و ادعای خود را ثابت کنید:
اگر گراف انتقال حالت یک DFA دارای دور باشد، زبان آن نامتناهی است.
پ) الگوریتمی ارائه دهید که در ورودی یک اتوماتای متناهی مانند M و رشته‌ای مانند $x \in \sum^*$ را بگیرد و تعیین کند آیا x زیررشته‌ی عضوی از $L(M)$ است یا خیر.

سوال ۳

(۴۰ نمره)

الفبای $\sum = \{a,b,c\}$ و جدول ضربی زیر را در نظر بگیرید:

*	a	b	c
a	c	a	b
b	b	c	a
c	c	b	c

همچنین تابع f را به این صورت تعریف می‌کنیم که به ازای ورودی $\omega \in \{a,b,c\}^+$، مقدار حاصل ضرب حرف‌های ω از چپ به راست را خروجی دهد. به عنوان مثال داریم:

$$f(abcd) = ((a*b)*c)*b = (a*c)*b = b*b = c$$

با استفاده از تابع f زبان L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L = \{\omega \in \{a,b,c\}^* | f(\omega) = f(\omega^R)\}$$

برای $w = w_۱w_۲\cdots w_n$، w^R به‌صورت $w^R = w_nw_{n-۱}\cdots w_۱$ تعریف می‌شود.
برای زبان L، NFA (یا $\epsilon-NFA$) مناسب رسم کنید.
راهنمایی: ابتدا سوال ۵ از سوالات تکمیلی را حل کنید. سپس سعی کنید برای هر مجموعه‌ی تراز تابع f، اتوماتای مناسبی طراحی کنید. (برای هر $i \in \Sigma$، مجموعه‌ی $\{w \in \Sigma^+ \mid f(w) = i\}$ یک مجموعه‌ی تراز تابع f است.)

تمرینات تکمیلی

سوال ۱

NFA (یا $\epsilon-NFA$) متناظر با اطلاعات داده‌شده را رسم کنید.

$Q = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$
$\Sigma = \{a, b\}$

توصیف تابع δ:

$\delta(q, \epsilon)$	$\delta(q, b)$	$\delta(q, a)$	q
$\{۲\}$	$\{۱\}$	$\{۱, ۲\}$	۱
$\emptyset$	$\{۳\}$	$\{۳\}$	۲
$\{۱\}$	$\{۴\}$	$\{۴\}$	۳
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{۵\}$	۴
$\{۵\}$	$\{۵\}$	$\emptyset$	۵

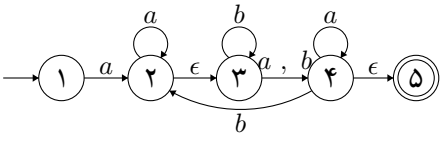
حالت ۱، حالت آغاز است.

$F = \{۳, ۵\}$

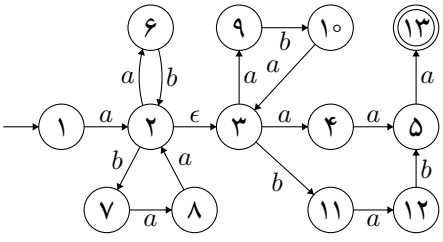
سوال ۲

برای هر یک از $\epsilon-NFA$ های زیر (که برای همگی آن‌ها داریم: $\Sigma = \{a, b\}$)، تابع δ را به طور کامل توصیف کنید. هم‌چنین تعیین کنید هر یک از رشته‌های aba، $abab$ و $aaaabbb$ توسط هر کدام از این ها پذیرفته می‌شود یا خیر.

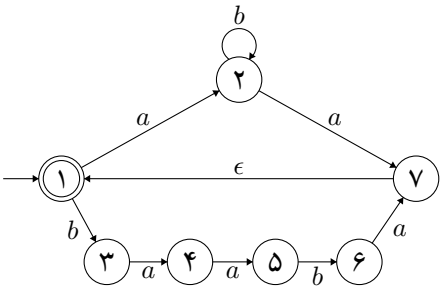
آ)



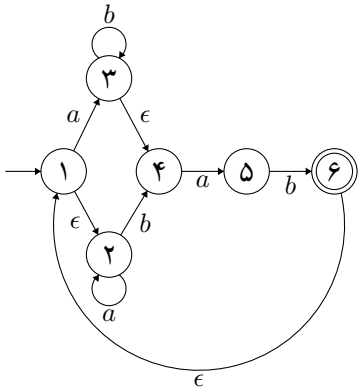
ب)



پ)



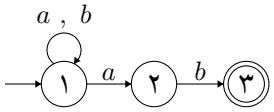
ت)



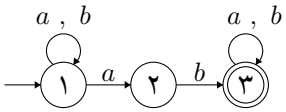
سوال ۳

برای هر یک از NFA های زیر با استفاده از روش گفته‌شده در کلاس DFA ای را که همان زبان را می‌پذیرد رسم کنید. (راه‌نمایی: نیازی به رسم تمام $۲^{|Q|}$ حالت نیست؛ کافی‌ست تمام حالاتی که از حالت {۱} قابل دست‌رسی هستند را پیدا کرده و تنها آن حالات را ترسیم کنید.)

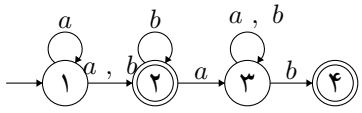
آ)



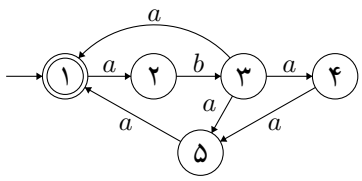
ب)



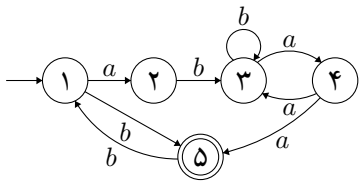
پ)



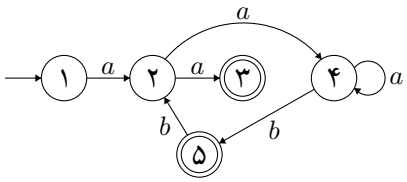
ت)



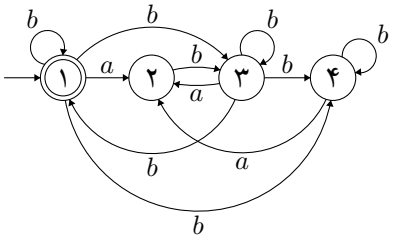
ث)



ج)

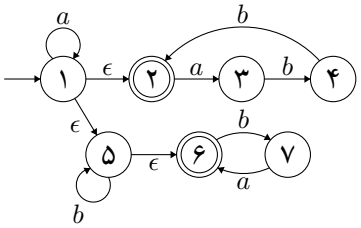


چ)

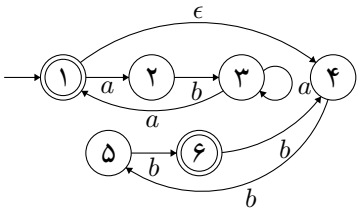


برای دو قسمت بعدی مجازید از هر روش دل‌خواه DFA خواسته‌شده را به دست آورید. برابر بودن زبان DFA و $\epsilon-NFA$ را اثبات کنید.

ح)



خ)



سوال ۴

فرض کنید L یک زبان منظم باشد.

آ) نشان دهید یک $\epsilon-NFA$ با فقط یک حالت نهایی وجود دارد که L را می‌پذیرد.
ب) نشان دهید یک NFA با فقط یک حالت نهایی وجود دارد که هیچ یالی با برچسب ϵ ندارد و L را می‌پذیرد، اگر و تنها اگر $\epsilon \notin L$ یا L تحت عمل الحاق رشته‌ها بسته باشد.

سوال ۵

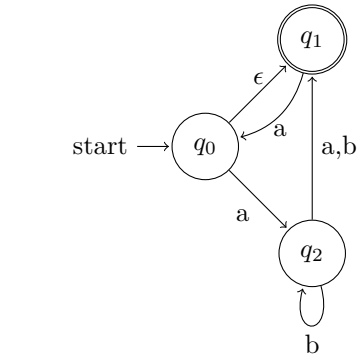
نشان دهید اگر زبان L یک زبان منظم باشد آن‌گاه L^R نیز منظم است. منظور از L^R، مجموعه‌ی

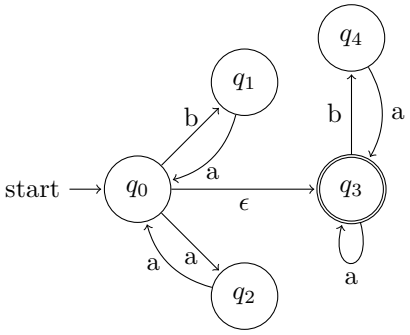
$$\{w^R \mid w \in L\}$$

است.

سوال ۶

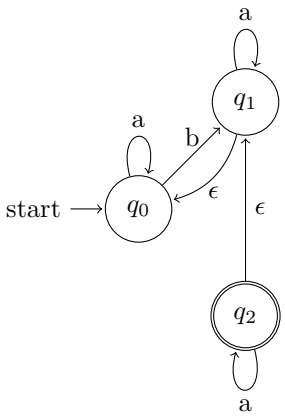
با استفاده از روش گفته‌شده در کلاس با توجه به گراف‌های انتقال $\epsilon-NFA$ های زیر، DFA مربوطه را طراحی کنید و در هر مرحله برای هر زیرمجوعه‌ی مورد استفاده در ساخت DFA بستار اپسیلون[1] آن زیرمجموعه را بنویسید.





سوال ۷

بستار اپسیلون را برای تمام حالات $\epsilon-NFA$ زیر بیابید:



سوال ۸

نشان دهید اگر در سوال اول تحویلی، N را به‌صورت زیر تعریف کنیم، همچنان حکم برقرار می‌مانَد.

$$N(L) = \{w \in \{\circ, 1\}^* : \exists x \in L \; H(w, x) \leq d\}$$

که d یک عدد طبیعی دلخواه است.

[1] ϵ-closure