



نظریه زبان ها و اتوماتا

دکتر شهرام خزایی

بهار ۱۴۰۱

تمرین سری صفر

زبان‌های منظم (۱)

مهلت تحویل: ساعت ۲۳:۵۹ روز ۱۶ اسفند

لطفاً پیش از پاسخ‌دادن به تمرین‌ها به نکات زیر توجه کنید:

- تمرین از دو بخش سوالات تحویلی و سوالات تکمیلی تشکیل شده است. توجه کنید که پاسخ‌دادن به سوالات تکمیلی نمره‌ی اضافه‌ای ندارد.
- ارسال سوال‌ها به فروم‌های اینترنتی و جست‌وجوی پاسخ آن‌ها در اینترنت مجاز نیست.
- می‌توانید با یکدیگر در حل سوالات مشورت کنید؛ اما باید اولاً راه‌حل‌تان را با بیان خودتان بنویسید و ثانیاً نام کسانی که با آن‌ها در حل سوال مشورت کرده‌اید را پیش از پاسخ‌تان به سوال ذکر کنید.
- در صورتی که در مورد تمرین‌ها سوالی و ابهامی داشتید پیشنهاد می‌شود از دستیاران پرسید. در صورت تشخیص مشابهت در راه‌حل‌ها، با فرض عدم تخلف تصحیح صورت خواهد گرفت اما مستندات بدون اطلاع دانشجو به مراجع ذی‌صلاح جهت بررسی، تصمیم و اقدام ارسال خواهد شد.
- دقت لازم را در نوشتن اثبات‌ها و بیان ادعاها به‌خرج دهید. علی‌الاصول هر ادعایی که در پاسخ به تمرین‌ها می‌آوردید باید با اثبات همراه باشد؛ مگر آن‌که آن گزاره‌ی مزبور در طول درس اثبات شده باشد و یا سوال صراحتاً گفته باشد که نیازی به اثبات نیست.
- برای مرتبط کردن بخش‌های مختلف یک اثبات، به‌جای استفاده از پیکان، از کلمات استفاده کنید. همچنین برای هر منظور از سورها (\forall, \exists) استفاده نکنید. پاسخ‌تان به سوالات باید همراه با توضیحات کافی باشد که مصحح بتواند راه‌حل شما را متوجه شود. متن کتاب مرجع را الگو قرار دهید و پاسخ‌تان را طوری بنویسید که هر کسی بتواند آن را دنبال کند و متوجه شود.
- پاسخ‌تان را در فایل‌ی با نام شماره دانشجوییتان در سامانه ابلود کنید. فرمت فایل ارسالی باید حتماً به‌صورت pdf باشد. اگر از پاسخ‌تان عکس می‌گیرید در نور مناسب این‌کار را بکنید و توجه کنید که تصویر واضح باشد. فایل ارسالی شما نباید نیاز به چرخاندن (rotation) داشته باشد. توجه کنید که پاسخ‌هایی که موارد قبل در آن رعایت نشده باشند یا ناخوانا و مخدوش باشند تصحیح نخواهند شد.



تمرینات تحویلی

سوال ۱

(۳۰ نمره)

الفبایی مانند Σ را در نظر بگیرید و فرض کنید $L, M \subseteq \Sigma^*$ دو زبان روی این الفبا هستند و $\epsilon \notin L$. نشان دهید اگر زبان $X \subseteq \Sigma^*$ در معادله‌ی

$$X = LX \cup M$$

صدق کند، در این صورت $X = L^*M$.

سوال ۲

(اثبات) (۱۰ + ۱۵ + ۱۵ + ۱۵ نمره)

برای هر یک از زبان‌های زیر DFA ای مانند A مثال بزنید که آن را بپذیرد. به دلخواه خود یک مورد را انتخاب کنید و اثبات کنید $L_i = L(A)$.

$$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ شامل زیررشته‌ی } abbaab \text{ است}\}$$

$$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ بسط دودویی یک عدد طبیعی مثبت است که بر ۵ بخش پذیر است}\}$$

در سوال بالا توجه کنید که بیت سمت راست MSB و بیت سمت چپ LSB است. هم‌چنین در بسط دودویی یک عدد مثبت، MSB نمی‌تواند صفر باشد.

فرض کنید

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

در واقع Σ شامل همه‌ی ستون‌های ۲ تایی از 0 و 1 است و هر رشته متشکل از این الفبا را می‌توانیم به صورت دو ردیف از رشته‌هایی متشکل از 0 و 1 (یا معادلاً بسط دودویی یک عدد طبیعی) ببینیم. (توجه کنید که بیت سمت چپ MSB است.)

$$L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ سه برابر ردیف بالایی است}\}$$

$$L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ از ردیف پایینی بزرگتر است}\}$$

دست‌گرمی سوال ۳

اگر با مفهوم مجموعه‌ی شمارا و ناشمارا آشنا نیستید، پیش از پرداختن به سوال بعد به این پرسش پاسخ دهید. توجه کنید که این سوال نمره‌ای ندارد و صرفاً یک دست‌گرمی است!

یک مجموعه را شمارا می‌گوییم هرگاه بتوان آن را در تناظر یک‌به‌یک با زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی اعداد طبیعی (\mathbb{N}) قرار داد. به بیان دقیق‌تر، مجموعه‌ی A شماراست هرگاه تابع یک‌به‌یک $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ موجود باشد. به‌طور شهودی، تعداد اعضای یک مجموعه‌ی شمارا حداکثر به اندازه‌ی تعداد اعداد طبیعی است.

- نشان دهید مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی اعداد طبیعی، یک مجموعه‌ی شماراست.
- نشان دهید مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی، شمارا نیست.
- آیا تعداد اعداد حقیقی با تعداد اعداد طبیعی برابر است؟
- نشان دهید مجموعه‌ی همه‌ی DFA ها شماراست.



سوال ۳

(۳۰ + ۲۰ نمره) یک الفبای تک‌حرفی مانند $\Sigma = \{a\}$ را در نظر بگیرید.

- آیا هر زبان روی چنین الفبایی، یک زبان منظم است؟ (یا معادلاً توسط یک DFA پذیرفته می‌شود؟) ادعایتان را اثبات کنید. (توجه کنید که برای پاسخ‌دادن به این سوال نمی‌توانید از لم تزریق استفاده کنید.)
- برای هر زبان مانند L روی این الفبا، مجموعه‌ی S_L را به صورت

$$S_L = \{|w| \mid w \in L\}$$

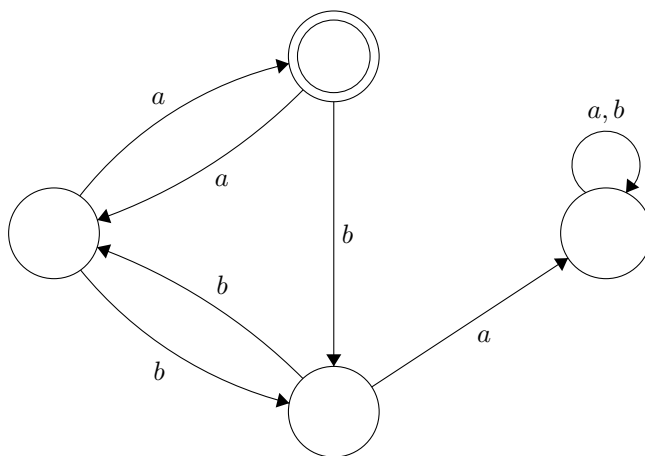
تعریف می‌کنیم. نشان دهید اگر S_L یک تصاعد حسابی باشد، در این صورت L یک زبان منظم است.

تمرینات تکمیلی

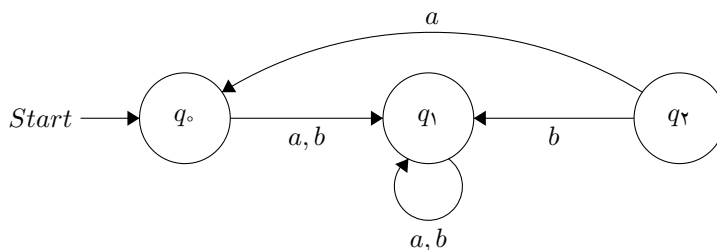
سوال ۱

مشخص کنید هر یک از اتوماتاهای زیر با توجه به تعریف DFA ، یک DFA است یا خیر. اگر پاسخ منفی است، دلیل خود را بیان کنید.

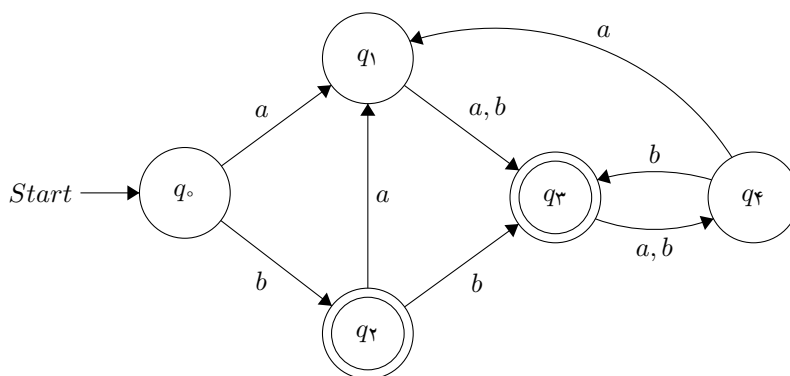
(آ) $\Sigma_1 = \{a, b\}$



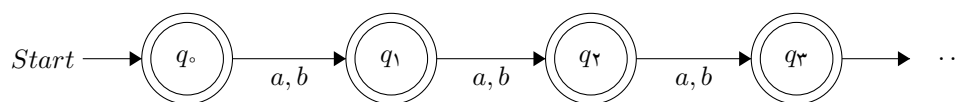
(ب) $\Sigma_2 = \{a, b\}$

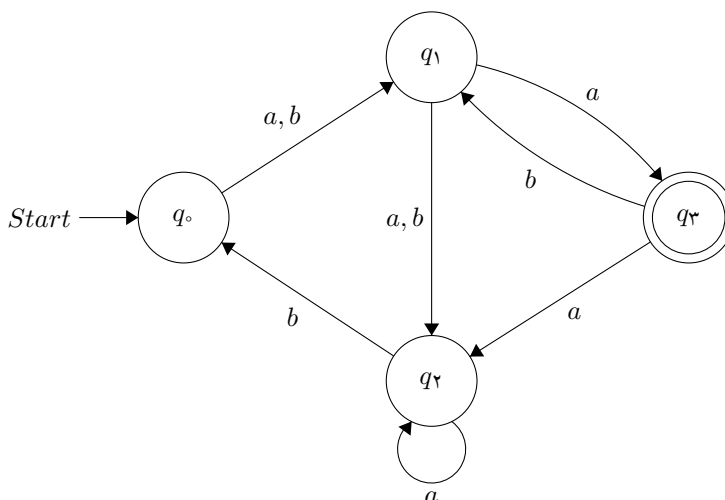
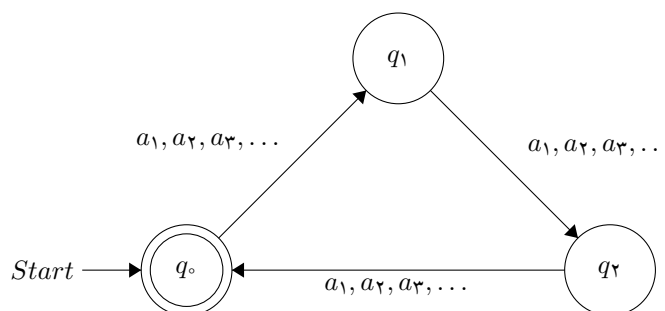


(پ) $\Sigma_3 = \{a, b, c\}$



(ت) $\Sigma_4 = \{a, b\}$



(ث) $\Sigma_\delta = \{a, b\}$

 (ج) $\Sigma_\epsilon = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$


سوال ۲

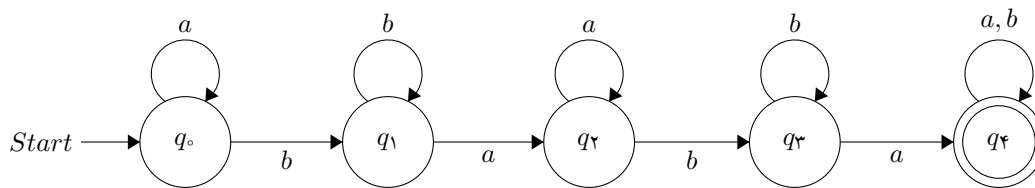
برای هر یک از توصیف‌های زیر که یک زبان را روی الفبای $\Sigma = \{0, 1\}$ مشخص می‌کنند، یک DFA طراحی کنید.

- طول رشته بر ۳ بخش پذیر است یا آن که با ۰ تمام شده است.
- هر بلوک چهارتایی از سمبل‌های متوالی شامل زیررشته‌ی ۰۱ می‌باشد.
- دقیقاً یک رخداد زیررشته‌ی ۰۱۰ در رشته وجود دارد. توجه کنید که برای نمونه در رشته‌ی ۰۱۰۱۰ دو رخداد زیررشته‌ی ۰۱۰ وجود دارد و نباید توسط DFA شما پذیرفته شود.
- رشته با ۱ شروع شده و با ۰ تمام شود.
- تعداد رخداد ۰ حداقل ۲ بار باشد و تعداد رخداد ۱ حداکثر ۱ بار باشد.
- رشته با ۰۱ شروع یا تمام شده باشد.

سوال ۳

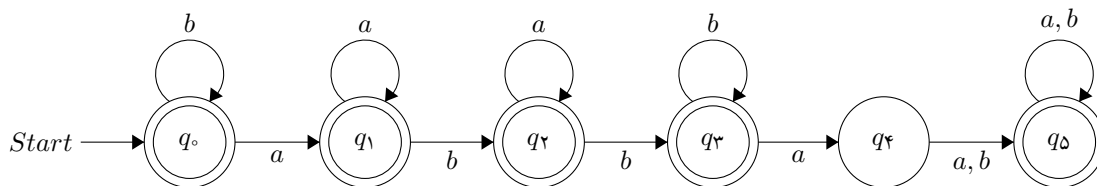
زبان هر یک از DFA های زیر را توصیف کنید و (با استقرا) اثبات کنید زبانی که توصیف کرده‌اید با زبان DFA داده شده برابر است.

مثالی برای شفاف ساختن منظور از «توصیف»: $\Sigma = \{a, b\}$

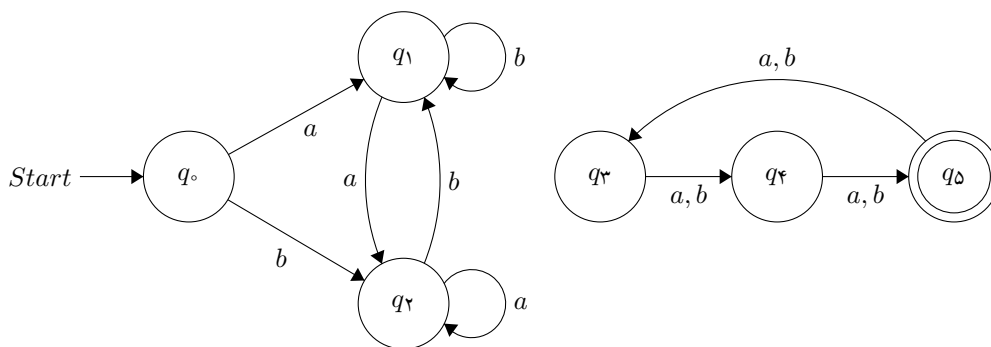


توصیف: مجموعه‌ی تمام رشته‌های متشکل از حروف a و b که زیردنباله‌ی $baba$ را دارند.

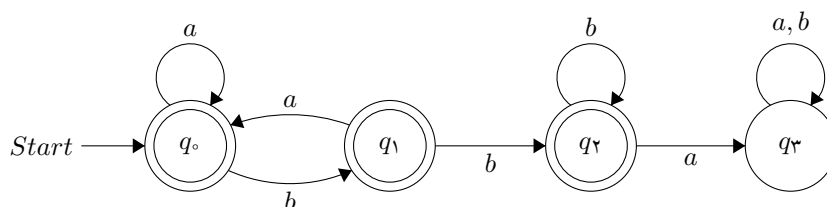
$$\Sigma_1 = \{a, b\} \text{ (آ)}$$



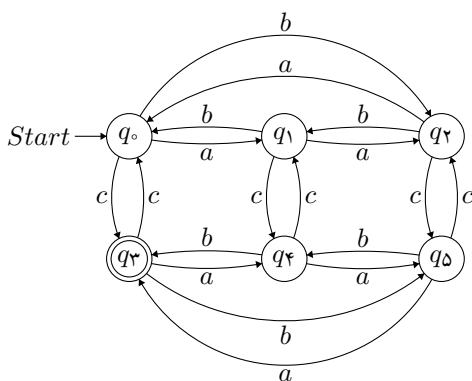
$$\Sigma_2 = \{a, b\} \text{ (ب)}$$



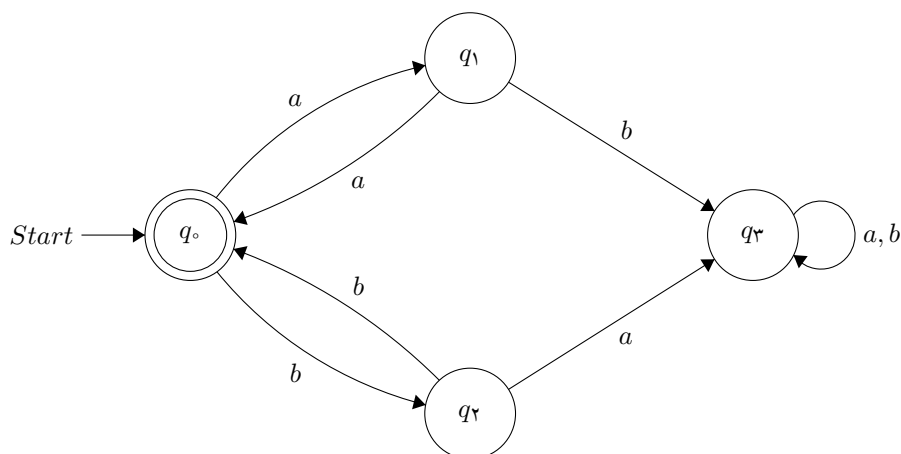
$$\Sigma_3 = \{a, b\} \text{ (پ)}$$



$$\Sigma_4 = \{a, b, c\} \text{ (ت)}$$



$$\Sigma_5 = \{a, b\} \text{ (ث)}$$



سوال ۴

نشان دهید برای هر حالت q و رشته‌ی x و y

$$\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y)$$

سوال ۵

فرض کنید $L \subseteq \Sigma^*$ یک زبان باشد. دو رشته‌ی x و y را نسبت به L تمایزپذیر می‌نامیم هرگاه رشته‌ای مانند z موجود باشد به نحوی که $xz \in L$ و $yz \notin L$ یا بالعکس.

- فرض کنید L یک زبان منظم و \mathcal{M} یک DFA باشد که آن را تصمیم می‌گیرد. نشان دهید اگر x و y دو رشته‌ی تمایزپذیر نسبت به L باشند، در این صورت

$$\hat{\delta}(q_0, x) \neq \hat{\delta}(q_0, y)$$

- یک مجموعه از رشته‌ها را تمایزپذیر نسبت به L می‌نامیم هرگاه رشته‌های عضو آن مجموعه دوه‌دو نسبت به L تمایزپذیر باشند. نشان دهید اگر L زیرمجموعه‌ای تمایزپذیر و k عضوی داشته باشد، در این صورت \mathcal{M} باید حداقل k حالت داشته باشد.