



## امتحان پایان‌ترم

زمان: ۲ ساعت و ۴۵ دقیقه

حتماً پیش از پاسخ‌دادن به نکات زیر توجه کنید:

توجه کنید که برای گرفتن نمره‌ی کامل از پرسش ۱، باید برای ادعاهایتان دلیل کافی بیاورید. با این حال، با توجه به محدودیت زمان، به شما اکیداً توصیه می‌شود که اثبات‌هایی مفصل و با جزئیات کامل ارائه نکنید. سعی کنید نکات مهم را به‌طور مختصر خاطر نشان کنید و کلیت طرح اثبات را بیان کنید. در مواردی که برای پاسخ به پرسشی یک الگوریتم، ماشین محاسبه، گرامر، عبارت منظم و ... ارائه می‌کنید، نیاز به اثبات درستی آن چه ارائه کرده‌اید نیست؛ اما سعی کنید با توضیحی مختصر، شهود پشت طراحی‌تان را به‌صورت منقول کنید. همچنین اگر برای پاسخ به قسمتی از پرسش اول، خواستید از لم تزریق استفاده کنید نیز توجه داشته باشید که نیازی نیست درگیر جزئیات حالت‌بندی‌های مختلف بشوید و صرفاً بیان کلیت روش، کفایت می‌کند.

در پاسخ به سوال‌های ۲ و ۳، برخلاف پرسش ۱، از شما انتظار می‌رود به‌طور دقیق ادعاهایتان را اثبات کنید. با این همه، اگر نیازی به طراحی ماشین تورینگ داشتید، چه در این سوال و چه در پرسش‌های قبل آن، می‌توانید از توصیف سطح بالا (الگوریتمی) ماشین تورینگ استفاده کنید و نیازی به طراحی سطح پایین (طراحی ساختار ماشین و تابع انتقال آن) نیست!

## پرسش ۱ درست و نادرست

درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را با ذکر اجمالی دلیل، تعیین کنید. (هر قسمت ۲ نمره)

۱. اگر در گراف انتقال حالت متناظر با یک  $DFA$ ، جهت یال‌ها را برعکس کنیم، گراف حاصل نمایش یک  $DFA$  است.

۲. اگر در گراف انتقال حالت متناظر با یک  $DFA$ ، جهت یال‌ها را برعکس کنیم، گراف حاصل نمایش یک  $NFA$  است.

۳. یک زبان منظم، نامتناهی است اگر و فقط اگر گراف انتقال حالت متناظر با  $DFA$  ای که آن را می‌پذیرد دارای دور باشد.

۴. مساله‌ی متناهی بودن یک زبان منظم، تصمیم‌پذیر است.

۵. یک ماشین محاسبه‌ی غیرقطعی، ماشینی است که قطعی نیست.

۶. زبان

$$L_1 = \{1^x * 1^y = 1^z \mid x, y, z \in \mathbb{N}, z = x^y\}$$

مستقل از متن، ولی غیرمنظم است.

۷. زبان

$$L_2 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, j \neq i \text{ یا } j \neq k\}$$

زبانی مستقل از متن است.

۸. زبان

$$L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{ماشین تورینگ است}\}$$

یک زبان تورینگ-تصمیم پذیر نیست.

۹. مسأله‌ی عضویت رشته‌ی  $w$  برای گرامر مستقل از متن داده شده، تصمیم پذیر است.

۱۰. مسأله‌ی تهی بودن زبان یک  $PDA$  که توصیف آن داده شده است، تصمیم ناپذیر است.

۱۱. مسأله‌ی برابری زبان یک گرامر مستقل از متن داده شده با  $\Sigma^*$ ، تورینگ-تشخیص پذیر است اما تورینگ-تصمیم پذیر نیست.

۱۲. اگر هیچ یک از زبان‌های  $L_1, L_2, \dots$  با هیچ  $DFA$  ای پذیرفته نشوند و به ازای هر  $i \geq 1$  داشته باشیم:  $L_i \subseteq L_{i+1}$ ، آن گاه زبان  $\cup_{i=1}^{\infty} L_i$  با هیچ  $DFA$  ای پذیرفته نمی شود.

## پرسش ۲ زبان‌های ساده‌ی لا ینحل (!?)

آیا روی الفبای تک عضوی  $\Sigma = \{a\}$ ، زبان‌هایی وجود دارند که تورینگ-تشخیص پذیر نیستند؟ ادعای خود را به طور کامل اثبات کنید. (۱۰ نمره)

## پرسش ۳ مقایسه‌ی سختی

۱. دو زبان زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{\langle M, w \rangle : \text{یک ماشین تورینگ است و رشته‌ی } w \text{ را می پذیرد}\}$$

$$H = \{\langle M, w \rangle : \text{یک ماشین تورینگ است و روی رشته‌ی } w \text{ متوقف می شود}\}$$

با فرض این که زبان  $A$ ، تصمیم ناپذیر است، تصمیم ناپذیری زبان دوم را نشان دهید. (۶ نمره)

۲. نشان دهید زبان زیر تصمیم ناپذیر است:

$$L_{comp} = \{\langle M_1, M_2 \rangle : L(M_1) = L(M_2)^c\}$$

توجه کنید که در بالا، منظور از  $\langle M_1, M_2 \rangle$ ، کدینگ چسبانده شده و قابل بازیابی ماشین‌های تورینگ  $M_1$  و  $M_2$  می باشد.

شاید برای پاسخ، تصمیم ناپذیری زبان

$$L_{all} = \{\langle M \rangle : L(M) = \Sigma^*\}$$

بتواند کمکتان کند. (۱۰ نمره)