



تمرین سری سوم

مهلت تحویل: ۲۵ اردیبهشت ماه ۱۴۰۱

پرسش ۱

با استفاده از قضیه‌ی بازگشت، قضیه رایش را ثابت کنید.
راهنمایی: به راه حلی که در کلاس برای اثبات تصمیم ناپذیر بودن زبان Min_{TM} ارائه شده است، توجه کنید.
توضیح در مورد قضیه‌ی رایش در صفحه‌ی بعد نوشته شده است.

پرسش ۲

می‌دانیم مسئله‌ی ۳-رنگ پذیر بودن یک گراف، $NP - complete$ است. نشان دهید اگر بتوان این مسئله را در زمان چندجمله‌ای حل کرد، آنگاه میتوان برای هر گراف دلخواه، در زمان چندجمله‌ای یک ۳-رنگ آمیزی سره (در صورت وجود) مشخص کرد.

پرسش ۳

نشان دهید هر یک از مسائل زیر، $NP - Complete$ هستند.
 (آ) به ازای ورودی گراف جهت دار G و عدد طبیعی k ، آیا میتوان با حذف حداکثر k راس از گراف G آن را فاقد دور نمود؟
 (ب) به ازای ورودی گراف وزندار G ، آیا یک دور همیتونی در G وجود دارد که مجموع وزن یال‌های آن حداقل نصف مجموع وزن کلیه یال‌های G باشد؟
 (پ) به ازای مجموعه متناهی A از اعداد صحیح و عدد صحیح k ، آیا زیرمجموعه‌ای از A وجود دارد که مجموع اعضای آن برابر با k شود؟

پرسش ۴

فرض کنید $P = NP$ باشد. نشان دهید ماشین تورینگی وجود دارد که به ازای هر ورودی به فرم رشته‌ی دهدهی یک عدد طبیعی مانند n ، در زمان چندجمله‌ای بر حسب طول n روی نوار آن یکی از دو خروجی زیر ظاهر شود:
 - به ازای عدد اول n خروجی صفر است.
 - به ازای عدد مرکب n خروجی الحاق دو رشته مانند x و y است، به طوری که هر دو بسط دهدهی یک عدد طبیعی بزرگتر از ۱ بوده و به طوری که حاصل ضرب این دو عدد طبیعی برابر با n می‌باشد.

پرسش ۵

مسئله‌ای را در نظر بگیرید که در آن به ازای هر ورودی به شکل دو عبارت منظم تصمیم می‌گیریم که آیا زبانی که این دو عبارت توصیف می‌کنند متفاوت است یا خیر. نشان دهید این مسئله $P - Space$ است.

پرسش ۶

(سوال امتیازی) میدانیم که مسئله‌ی CNF یک مسئله $NP - Complete$ است. فرض کنید در هر یک از عبارات منطقی این زبان، به جای عملگر اجتماع از عملگر XOR جایگزین کرده‌ایم. آیا زبان حاصل باز هم $NP - Complete$ است؟

قضیه‌ی رایس: هر زبان متناظر با یک خاصیت معنایی غیربدیهی تصمیم ناپذیر است.

برای مثال، زبان متشکل از همه‌ی ماشین‌های تورینگ که زبان آنها منظم باشد، طبق قضیه رایس تصمیم ناپذیر است. (منظور از خاصیت معنایی برای یک TM این است که به زبان TM مرتبط باشد، نه خود TM . برای مثال، تهی بودن زبان یک خاصیت معنایی است؛ ولی اینکه تعداد حالات حداکثر ۱۰ تا باشد یک خاصیت غیرمعنایی است. به وضوح اگر $L(M_1) = L(M_2)$ و ماشین M_1 خاصیت معنایی P را داشته باشد، آنگاه ماشین M_2 نیز این خاصیت را دارد. منظور از خاصیت غیر بدیهی برای یک TM این است که حداقل یک TM این خاصیت را دارد و حداقل یک TM این خاصیت را ندارد. برای مثال، تک‌حالتی بودن یک خاصیت غیربدیهی است. از طرفی این خاصیت که تمام رشته‌های ماشین تورینگ طول زوج داشته و رشته‌ی ۰۰۰ نیز توسط همان ماشین تورینگ پذیرفته شود، یک خاصیت بدیهی است.)

موفق باشید.