دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

نظریه علوم کامپیوتر

دکتر محمدهادی فروغمند اعرابی
بهار ۱۴۰۱

تمرین دوم

مدل تورینگ، زبان‌های RE و توابع محاسبه‌پذیر

مهلت تحویل: ۲۹ فروردین

- نمره‌ی کل این تمرین ۱۰۰ نمره است.
- پاسخ برخی سوالات را ممکن است با اندکی جست‌وجو در اینترنت بیابید. کمک گرفتن از منابع دیگر بلامانع است اما پاسختان را باید با بیان خودتان بنویسید و از روی منبعی کپی نکنید و از همه مهم‌تر، آن‌چه می‌نویسید را یاد بگیرید!
- چنانچه در مورد سوالات، یا در مورد راه‌حل‌هایتان ابهام یا سوالی داشتید، می‌توانید با دستیاران مطرحشان کنید.

سوال ۱

۱. (۷.۵ نمره) آیا الفبای Σ و زبان‌های $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \subseteq \Sigma^*$ وجود دارند به‌طوری‌که تحویل چند به یکی[1] بین این دو زبان وجود نداشته باشد؟

۲. (۷.۵ نمره) فرض کنید $\Sigma = \{۰, ۱, ..., ۹\}$ و A زبان تمام رشته‌هایی روی الفبای Σ باشد که اگر اعضای آن را به عنوان عدد ده‌دهی در نظر بگیریم، یک عدد اول باشند. به عنوان مثال ۲ و ۰۰۱۱ اعضای A هستند ولی ۲۳۶ عضو A نیست. حال تمام زبان‌هایی مثل B را پیدا کنید که روی الفبای Σ تعریف شده‌اند و ضمناً داریم :

$$A \leq_m B$$

۳. (۵ نمره) تاکنون با زبان‌هایی آشنا شده‌اید که ماشین تورینگی وجود ندارد که آن‌ها را تصمیم بگیرد؛ اما در نگاه اول ممکن است به‌نظر برسد که این زبان‌ها به‌صورت تصنعی ساخته شده‌اند تا (مثلاً با تکنیک قطری‌سازی) بتوان نشان داد تصمیم‌ناپذیر هستند. به بیانی دیگر، شاید یک دانش‌جوی کم سن و سال با شما این‌گونه بحث کند که «اگرچه با کلک و حقه (!) نشان دادید که زبان‌هایی وجود دارند که الگوریتم تصمیم‌گیری برایشان وجود ندارد، اما این زبان‌ها، مثلاً مسائلی از این دست این‌که "آیا ماشین تورینگ داده‌شده کدینگ خودش را می‌پذیرد یا نه"، واقعاً در دنیای واقعی برای کسی مهم نیستند؛ و مسائلی که به‌طور طبیعی برای ما ایجاد می‌شود همگی تصمیم‌پذیرند.»
برای متقاعد کردن این دانشجو، با کمی جست‌وجو، دو مسأله‌ی تصمیم‌ناپذیر را که به‌طور طبیعی، حتی پیش از به وجود آمدن مفهوم ماشین تورینگ، وجود داشته‌اند و امروزه می‌دانیم تصمیم‌ناپذیر هستند، مثال بزنید.

سوال ۲

(۴۰ نمره) در این تمرین، نسخه‌ای از قضیه‌ی رایس را برای اثبات تشخیص‌ناپذیری زبان‌ها بررسی و اثبات خواهیم کرد.
فرض کنید $\mathcal{P}$ یک خاصیت از زبان ماشین‌های تورینگ باشد. قرار دهید:

$$P = \{\langle M \rangle \ : \ \text{کدینگ یک ماشین تورینگ است به‌طوری که } L(M) \text{ خاصیت } \mathcal{P} \text{ را داشته باشد.} \ \langle M \rangle\}$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$L_P = \{L(M) \ : \ M \in P\}$$

نشان دهید P تشخیص‌پذیر است اگر و تنها اگر سه شرط زیر برآورده شوند:

۱. اگر $L_۱ \in L_P$ و $L_۲ \supseteq L_۱$، آنگاه $L_۲ \in L_P$.

۲. اگر $L_۱ \in L_P$، آنگاه یک زیرمجموعه‌ی متناهی $L_۲ \subseteq L_۱$ وجود داشته باشد که $L_۲ \in L_P$.

۳. شمارنده‌ی $\mathcal{E}$ وجود داشته باشد که همه‌ی زبان‌های متناهی L_P را چاپ کند.

سوال ۳

(۳۰ نمره) تصمیم‌پذیر بودن سه‌مورد از زبان‌های زیر را به دلخواه بررسی کنید و ادعایتان را اثبات کنید.

۱. زبان متشکل از همه $\langle M, w\rangle$ که در اجرای M روی رشته w نشانگر آن حداقل یک‌بار به سمت چپ میرود.

۲. زبان متشکل از همه $\langle M, q\rangle$ هایی که q حالتی از ماشین تورینگ M است که به ازای هیچ رشته‌ی ورودی وارد حالت q نمی‌شود.

[1] many-to-one reduction

۳. زبان متشکل از همه DFA هایی که حداقل دو رشته مانند x و y می‌پذیرند به طوری که x معکوس رشته‌ی y باشد.

۴. زبان متشکل از همه‌ی $\langle M, n\rangle$ هایی که $|L(M)| \geq n$.

۵. زبان متشکل از کدینگ همه‌ی ماشین تورینگ‌هایی که رشته ϵ را می‌پذیرند.

۶. زبان متشکل از همه $\langle M, s\rangle$ هایی که ماشین تورینگ M در حین اجرا بر روی حداقل یک ورودی، زیررشته‌ی s را روی نوار می‌نویسد.

سوال ۴

(۱۰ نمره) فرض کنید تمام ماشین‌های تورینگ را به ترتیب الفبایی (کدینگشان) مرتب کرده‌ایم و $M_۷$ هفتمین ماشین تورینگ این لیست است. آیا تابع $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، محاسبه‌پذیر است؟

$$\forall w \in \Sigma^* \;\; f(w) = \begin{cases} w & L(M_۷) = \emptyset \\ w^R & o.w. \end{cases}$$