دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

نظریه علوم کامپیوتر

دکتر محمدهادی فروغمند اعرابی

بهار ۱۴۰۱

تمرین اول

زبان‌های منظم و مستقل از متن

مهلت تحویل: ۲۸ اسفند

- نمره‌ی کل این تمرین ۱۲۰ نمره است که ۲۰ نمره‌ی آن امتیازی است.
- پاسخ برخی سوالات را ممکن است با اندکی جست‌وجو در اینترنت بیابید. کمک گرفتن از منابع دیگر بلامانع است اما پاسختان را باید با بیان خودتان بنویسید و از روی منبعی کپی نکنید و از همه مهم‌تر، آن‌چه می‌نویسید را یاد بگیرید!
- چنانچه در مورد سوالات، یا در مورد راه‌حل‌هایتان ابهام یا سوالی داشتید، می‌توانید با دستیاران مطرحشان کنید.

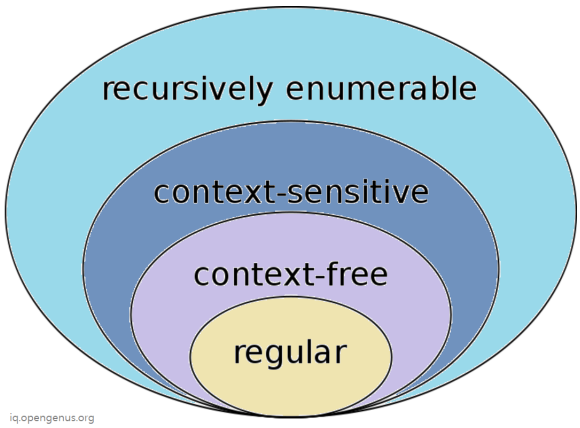
سوال ۱

این سوال، یک سوال مفهومی است. نیازی نیست اثبات‌های دقیق بنویسید و هدف آن است که با توضیحات کافی، به پرسش‌ها پاسخ دهید.

۱. (۵ نمره) توضیح دهید که اگر در تعریف اتوماتای متناهی، از متناهی بودن تعداد استیت‌ها صرف‌نظر کنیم چه می‌شود.

۲. (۵ نمره) از درس اتوماتا به یاد دارید که مدل NFA با مدل DFA معادل است؛ به این معنی که برای هر زبان فرمال که NFA ای مانند $\mathcal{A}$ وجود داشته باشد که آن را بپذیرد (یا تصمیم بگیرد!)، DFA ای مانند $\mathcal{A}'$ وجود خواهد داشت که $\mathcal{A}'$ نیز آن زبان را می‌پذیرد. آیا برای مدل‌های دیگری که می‌شناسید نیز چنین است؟ به عبارت دیگر، آیا برای مدل‌های دیگر محاسبه نیز، Determinism چیزی از Non-determinism نمی‌کاهد؟ آیا می‌توانید شهوداً توضیح دهید که چرا در بعضی مدل‌ها این دو معادلند و در برخی دیگر نیستند؟

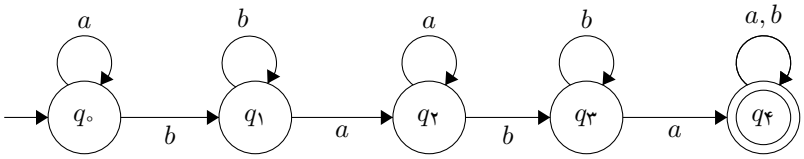
۳. (۵ نمره) با سلسله‌مراتب چامسکی در درس اتوماتا آشنا شده‌اید. شمایی از این سلسله‌مراتب را می‌توانید در تصویر زیر مشاهده کنید.



آیا می‌توانید توضیح دهید که چرا در نظریه‌ی محاسبه، از میان تعداد زیادی از کلاس‌های زبان‌های فرمال که موجودند، بیش از همه، علاقه‌مند به مطالعه‌ی این چهار کلاس هستیم؟ کدام ویژگی درخشان است که این کلاس‌ها را از بقیه متمایز می‌کند؟

سوال ۲

در درس اتوماتا با مسائلی از این دست آشنا شده‌اید که «برای یک DFA داده‌شده مانند $\mathcal{A}$، زبان $\mathcal{A}$ را توصیف کنید.» به‌عنوان مثال، توصیفی از زبانی که DFA زیر می‌پذیرد، چنین است: «مجموعه‌ی تمام رشته‌های متشکل از حروف a و b که زیردنباله‌ی $baba$ را دارند.»



در این تمرین می‌خواهیم کمی فرمال‌تر این‌کار را انجام دهیم!
می‌دانیم که یکی از راه‌های توصیف متناهی یک مجموعه، استفاده از عبارات منطقی است. به بیان غیر دقیق، اگر ϕ یک عبارت منطقی باشد، توصیف زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند:

$$\{x : \phi(x)\}$$

۱. (۲۰ نمره) سعی کنید برای هر DFA یک عبارت منطقی ارائه دهید که زبان همان DFA را توصیف کند. بدین منظور از راهنمایی‌هایی که در ادامه آمده است استفاده کنید. با دادن پاسخ کامل به خواسته‌ی بند اول راهنمایی، نمره‌ی این بخش را کامل دریافت می‌کنید. چنانچه بتوانید به بندهای دیگر راهنمایی نیز پاسخ دهید، بسته به پاسختان، نمره‌ی بیشتری دریافت خواهید کرد.

۲. (۵ نمره) به عنوان یک سوال امتیازی، آیا می‌توانید کمی درباره‌ی غیردقیق بودن بیان بالا (برای توصیف یک مجموعه با عبارتی منطقی مانند ϕ) توضیح دهید؟

راهنمایی‌هایی برای پاسخ‌دادن به این سوال:

- ابتدا از یک زبان منظم دلخواه شروع کنید. سعی کنید عبارت منطقی‌ای بیابید که همان زبان را توصیف کند. شاید در قدم اول، یافتن «یک» عبارت کار ساده‌ای نباشد. می‌توانید در عوض، الفبایتان را یک الفبای باینری بگیرید و به هر کاراکتر ظاهر شده در یک رشته به چشم یک اتم نگاه کنید؛ به این ترتیب، ارائه‌دادن تعداد شمارایی عبارت منطقی (در زبان منطق گزاره‌ها) که زبان موردنظرتان را توصیف کنند کار سختی نیست. (اگر با مدل‌های محاسبه‌ی غیریکنواخت (مثلا محاسبات مداری) آشنا باشید، شاید این را بهتر حس کنید که در این گام، در واقع شما یک توصیف غیر یکنواخت منطقی برای زبانتان ارائه می‌کنید!)
- برای آن‌که به‌جای تعداد شمارایی عبارت منطقی، فقط یک عبارت برای توصیف زبان مورد نظرتان ارائه کنید، معقول به‌نظر می‌رسد که جست‌وجویتان را از عبارات منطقی در یک زبان منطق مرتبه‌ی اول شروع کنید. آیا منطق مرتبه‌ی اول برای توصیف همه‌ی زبان‌های منظم کافی است؟ اگر چنین نیست، مثال نقضی ارائه کنید.
- آیا می‌توانید زبان منطق مرتبه‌ی اول را آن‌قدر توسعه دهید که برای توصیف زبان‌های منظم کافی باشد؟

سوال ۳

(۲۰ نمره) می‌دانیم که مجموعه‌ی همه‌ی زبان‌هایی که توسط گرامرهای مستقل از متن ساخته می‌شوند با مجموعه‌ی همه‌ی زبان‌هایی که توسط ماشین‌هایی از مدل PDA تشخیص داده می‌شوند، برابر است. آیا می‌توان به‌طور مشابه نوع خاصی از گرامرها را مشخص کرد که همان کلاس زبان‌های منظم را توصیف کنند؟ ادعایتان را اثبات کنید.

سوال ۴

(۲۰ نمره) در این تمرین برخی خواص بستاری زبان‌های منظم را بررسی خواهیم کرد. به دلخواه خود، دو مورد را انتخاب کنید و آن‌ها را اثبات کنید.

۱. فاصله‌ی همینگ بین دو رشته‌ی هم‌طول x و y که آن را با $H(x,y)$ نمایش می‌دهیم، تعداد اندیس‌هایی در x و y است که کاراکترهای نظیر آن اندیس‌ها در x و y متفاوتند. برای مثال، $H(۱۱۰۱۱۱۱, ۰۰۰۱۱۱۱) = ۲$.
برای هر زبان A، عملگر $N_۱$ را به این‌صورت تعریف می‌کنیم که:

$$N_۱(A) = \{w \in \{۰,۱\}^* : \exists x \in A \ H(w,x) \leq ۱\}$$

نشان دهید کلاس زبان‌های منظم تحت عملگر $N_۱$ بسته است.

۲. برای یک الفبای داده شده مانند Σ، به سادگی می‌توان دید که Σ^* با عمل concatation ویژگی‌های زیر را دارد:

$$\forall x, y \in \Sigma^* \ \ [x \cdot y \in \Sigma^*]$$

$$\exists \lambda \in \Sigma^* \ \forall w \in \Sigma^* \ \ [w \cdot \lambda = \lambda \cdot w = w]$$

به ساختارهایی جبری که دو ویژگی فوق را داشته باشند یک تکواره[1] می‌گویند.
برای دو ساختار جبری، نگاشت‌هایی بین آن دو را که حافظ این ساختار هستند، homomorphism می‌نامند. به‌طور خاص، اگر $\Sigma_۱$ و $\Sigma_۲$ دو الفبا باشند، نگاشت $f : \Sigma_۱ \to \Sigma_۲$ یک homomorphism است هر گاه برای هر $x, y \in \Sigma_۱$ داشته باشیم:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

[1] Monoid

نشان دهید اگر $A \subseteq \Sigma_1^*$ یک زبان منظم باشد،

$$f(A) = \{y \in \Sigma_2^* \mid \exists x \in A : \ y = f(x)\}$$

نیز منظم خواهد بود.

۳. عملگر shuffle را روی دو رشته‌ی u و v با $u \circledast v$ نمایش می‌دهیم و آن را به این صورت تعریف میکنیم که مجموعه‌ای است شامل تمام رشته‌هایی مانند

$$u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_k v_k$$

به‌طوری‌که $k \geq 0$ و u_iها و v_iها رشته‌هایی از Σ^* هستند به‌نحوی که $u = u_1 u_2 \cdots u_k$ و $v = v_1 v_2 \cdots v_k$.
به همین‌ترتیب عملگر shuffle را روی دو زبان $A, B \subseteq \Sigma^*$ به این‌صورت تعریف می‌کنیم که

$$A \circledast B = \bigcup_{u \in A, v \in B} u \circledast v$$

نشان دهید زبان‌های منظم تحت این عملگر بسته‌اند.

سوال ۵

فرض کنید یک الفبای ورودی مانند Σ و یک الفبای استک مانند Γ را فیکس کرده‌ایم. پیکربندی زیر را برای هر ماشین PDA قرارداد می‌کنیم:
در هر کلاک، اگر ماشین در استیت p قرار داشته باشد، زیررشته‌ی خوانده‌نشده از ورودی رشته‌ی $w \in \Sigma^*$ باشد و محتوای استک نیز رشته‌ی $\alpha \in \Gamma^*$ باشد؛ پیکربندی ماشین را با رشته‌ی $\alpha p w$ نمایش می‌دهیم.
همچنین توجه کنید که منظور از پیکربندی توقف[2]، پیکربندی‌ای است که ماشین با قرار گرفتن در آن پیکربندی، امکان هیچ انتقالی از آن را نداشته باشد. بدیهی است که اگر ماشین در پیکربندی توقف قرار گیرد، محاسبه به پایان می‌رسد.

(۱۵ نمره) PDA ای مانند $\mathcal{A}$ را در نظر بگیرید که الفبای ورودی آن Σ، الفبای استک آن Γ، مجموعه‌ی استیت‌های فاینالش $F \subseteq Q$ و استیت آغازینش q_0 باشد و سمبل Z_0 نیز برای انتهای استک استفاده می‌شود. سه زبان مطابق زیر به $\mathcal{A}$ نسبت می‌دهیم:

- زبان فاینال:

$$L_F(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* : \exists q \in F, \ Z_0 q_0 w \Rightarrow^* \alpha q\}$$

- زبان استاندارد:

$$L_H(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* : \exists q \in F, \ Z_0 q_0 w \Rightarrow^* \alpha q \ \& \ q \text{ is a halting configuration } \}$$

- زبان استک خالی:

$$L_S(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* : \exists q \in F, \ Z_0 q_0 w \Rightarrow^* q\}$$

نشان دهید PDA های $\mathcal{A}'$ و $\mathcal{A}''$ وجود دارند به‌نحوی که:

$$L_F(\mathcal{A}) = L_H(\mathcal{A}') = L_S(\mathcal{A}'')$$

سوال ۶

عملگر min را روی یک زبان فرمال L به این‌صورت تعریف می‌کنیم که

$$min(L) = \{w \in L : \text{ندارد } L \text{ در پیشوند اکیدی } w \}$$

نشان دهید (۱۰ نمره) کلاس زبان‌های مستقل از متن تحت min بسته نیست.

[2] Halting configuration

سوال ۷

(۱۵ نمره) برای هر یک از مسائل زیر یک الگوریتم تصمیم‌گیر ارائه دهید.

۱. برای یک PDA داده شده مانند $\mathcal{A}$، آیا زبان $\mathcal{A}$ تهی است؟

۲. برای یک اتوماتای متناهی داده شده مانند M و رشته‌ای مانند $x \in \Sigma^*$، آیا x زیررشته‌ی عضوی از $L(M)$ است؟

۱ دو پرسش برای بیشتر فکر کردن

- برای PDA ای مانند $\mathcal{A}$، با مشخصات سوال ۵، زبان استک[۳] $\mathcal{A}$ را به این‌صورت تعریف می‌کنیم که

$$SL(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \Gamma^* : \exists x \in \Sigma^* \exists q \in F,\ \alpha q_\circ x \Rightarrow^* q\}$$

  نشان دهید $SL(\mathcal{A})$ یک زبان منظم است.

- آیا می‌توانید ثابت کنید کلاس DCFL تحت عملگر min که در سوال ۶ معرفی شد، بسته است؟

[3] Stack language