تمرین سری ششم کارگاه حل تمرین ریاضی ۱
نیمسال اول ۹۹–۹۸

انجمن علمی دانشکده‌ی علوم ریاضی

آبان ۱۳۹۸

---

۱. در مورد هر یک از توابع زیر تحقیق کنید که در نقطه‌ی صفر مشتق‌پذیر است یا خیر.

(آ) $f(x) = x|\sin x|$

(ب) $g(x) = |x|\sin x$

(ج) $$h(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

(د) $$k(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

۲. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

(آ) ثابت کنید اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، حد زیر موجود و برابر با $f'(a)$ است.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

(ب) نشان دهید که اگر این حد وجود داشته باشد، لزومی ندارد که تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد.

(ج) فرض کنید $F(h,k)$ عبارتی بر حسب دو متغیر h و k باشد. منظور از

$$\lim_{h,k \to 0^+} F(h,k) = L$$

این است که به ازای هر عدد مثبت ε، عددهایی مثبت مانند δ_1 و δ_2 موجوداند که هرگاه $0 < h < \delta_1$ و $0 < h < \delta_2$، آنگاه $|F(h,k) - L| < \varepsilon$. ثابت کنید اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد، حد زیر وجود دارد و برابر با $f'(a)$ است.

$$\lim_{h,k \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a-k)}{h+k}$$

(د) فرض کنید $0 < h < k$، نشان دهید که اگر f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد لزومی ندارد که حد زیر وجود داشته باشد.

$$\lim_{h,k\to 0^+} \frac{f(a+k)-f(a+h)}{k-h}$$

(از تابع قسمت (د) سوال قبل استفاده نمایید.)

۳. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر است و $f(0)=f(1)$، $f'(0)>1$ و $f'(1)>1$. نشان دهید معادله‌ی $f'(x)$ در $(0,1)$ دست کم دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

۴. ثابت کنید که اگر f در $(0,1)$ پیوسته، مشتق‌پذیر و ناصفر باشد و داشته باشیم $f(0)=1$ و $f(1)=2$. آن‌گاه معادله‌ی $f^2(x)-2f'(x)=0$ در $(0,1)$ جواب دارد.

۵. فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که در هر نقطه‌ی از $(0,1)$ مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(0)=0$ و $f(1)=1$، ثابت کنید نقاط $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<1$ وجود دارند که

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}+\cdots+\frac{1}{f'(x_n)}=n$$

۶. سطح زیر منحنی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1+e^{x^2}}$، محصور به محور x و محدود به دو خط $x=\sqrt{\ln 3}$ و $x=\sqrt{\ln 8}$ را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم حاصل از دوران را حساب کنید.

۷. گربه‌ای وسط نردبانی به طول ۴ متر که به درختی تکیه داده شده است، نشسته است. فردی پایه‌ی نردبان روی سطح زمین را با سرعت ۱ متر بر ثانیه از درخت دور می‌کند و گربه با سرعت نیم متر بر ثانیه شروع به بالا رفتن از نردبان می‌کند. بیشترین ارتفاع گربه از سطح زمین را در هر یک از حالات زیر محاسبه کنید.

(آ) اگر در شروع فاصله‌ی پایه‌ی نردبان از درخت برابر ۲ متر باشد.

(ب) اگر در شروع فاصله‌ی پایه‌ی نردبان از درخت برابر ۲.۵ متر باشد.

۸. فرض کنید $f(x)=x^6-x^3-x$. نشان دهید برای $a,b\in[-1,1]$ داریم:

$$|f(a)-f(b)|\leq 1/45|a-b|$$

۹. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و تناوبی با دوره تناوب 2π است. یعنی برای هر $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

(آ) نشان دهید $a\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $f(a+\pi)=f(a)$.

(ب) اگر f مشتق‌پذیر باشد نشان دهید f' در هر بازه‌ی بسته به طول 2π دست کم دو بار صفر می‌شود.

۱۰. فرض کنید $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دو تابع هستند که در نقطه‌ی $a\in\mathbb{R}$، $f(a)=g(a)$ و $f'<g'(a)$. نشان دهید $\delta>0$ وجود دارد که برای هر h که $0<h<\delta$ داریم:

$$f(a+h)<g(a+h)$$

۱۱. متحرکی روی دایره‌ی $x^۲+y^۲ = R^۲$ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω رادیان بر ثانیه در جهت مثلثاتی گردش می‌نماید. فاصله‌ی خط مستقیم متحرک از نقطه‌ی $(a, ۰)$ که $a > ۰$ ثابت در زمان t را با $D(t)$ نمایش می‌دهیم. $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$ را وقتی متحرک در نقطه‌ی $(۰, R)$ است محاسبه کنید.

۱۲. دو تابع مشتق‌پذیر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مفروضند به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند.

$$(*) \begin{cases} f'(x) = g(x) \text{و} g' = -f(x) \\ f(۰) = ۰ \text{و} g(۰) = ۱ \end{cases}$$

(آ) ثابت کنید که برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f^۲(x) + g^۲(x) = ۱$.

(ب) فرض کنید $f_۰$ و $g_۰$ دو تابع دلخواه باشند که در روابط $(*)$ صدق می‌کند. ثابت کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f_۰(x) = f(x)$ و $g_۰(x) = g(x)$.

۱۳. فرض کنید $f : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ یک تابع پیوسته باشد به طوری که روی $(۰, ۱)$ مشتق‌پذیر باشد و همچنین عدد L چنان موجود است که $|f'(x)| \leq L < ۱$. برای هر $x \in (۰, ۱)$:

(آ) ثابت کنید معادله‌ی $f(x) = x$ روی $[۰, ۱]$ دارای جوابی یکتا مانند s است.

(ب) نقطه‌ی دلخواه $a \in [۰, ۱]$ را در نظر بگیرید. دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_۰ = a \quad \text{و} \quad x_۱ = f(x) \quad \text{و} \ldots \text{و} \quad x_{n+۱} = f(x_n)$$

ثابت کنید دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=۰}^{\infty}$ به s همگراست.

۱۴. فرض کنید I یک بازه‌ی باز و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد و $x_۰ \in I$ وجود داشته باشد که $f'(x_۰) \neq ۰$. نشان دهید بازه‌ی باز مانند J حول $x_۰$ وجود دارد که $J \subset I$ و اگر دامنه‌ی f را به J محدود کنیم تابع حاصل وارون‌پذیر است.

۱۵. آیا تابع مشتق‌پذیر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $f(۰) = ۱$ و برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f'(x) \geq f(x)^۲$ ؟

۱۶. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد که $f(۰) = ۰$ و برای هر $x \in \mathbb{R}$، $|f'| \leq f(x)$. ثابت کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = ۰$.

۱۷. فرض کنید تمام مشتقات تابع $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ موجود و پیوسته باشد و $|f(۰)| \leq |f(۱)|$. ثابت کنید یا $x \in (۰, ۱)$ وجود دارد که $f(x)$ و $f'(x)$ ناصفر و هم‌علامتند یا f تابعی ثابت است.

۱۸. فرض کنید $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که روی $(۰, ۱)$ مشتق‌پذیر است. و برای هر $x \in (۰, ۱)$ در شرط $۰ \leq f'(x) \leq ۲f(x)$ صدق می‌کند. اگر $f(۰) = ۰$ ثابت کنید f تابع ثابت صفر است.

۱۹. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $c > ۰$ چنان باشد که

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\lim_{n\to\infty}(f(x + \frac{۱}{n}) - f(x)) = ۰$، ثابت کنید f تابعی مشتق‌پذیر است.