

تمرین سری پنجم - کارگاه حل مسئله ریاضی عمومی ۱

چهارشنبه ۲۲ آبان ۹۸

مسئله ۱. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است به طوری که برای هر $x \in (0, 1)$ ، $f^2(x) = 1$ ثابت کنید روی این بازه $f \equiv 1$ یا $f \equiv -1$.

مسئله ۲. فرض کنید $f: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(0) = f(n)$ ثابت کنید $x_1, x_2 \in [0, n]$ وجود دارد به طوری که:

$$x_2 - x_1 = 1, \quad f(x_1) = f(x_2)$$

مسئله ۳. فرض کنید $f, g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ دو تابع پیوسته با ماکزیمم برابر باشند. ثابت کنید $c \in [0, 1]$ موجود است به طوری که: $f(c) = g(c)$

مسئله ۴. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی متناوب باشد. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ موجود باشد نشان دهید f تابعی ثابت است. نتیجه بگیرید $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ وجود ندارد.

مسئله ۵. فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که $f(0) = 1$ و $f(1) = 0$ نشان دهید عدد $c \in [0, 1]$ موجود است به طوری که $f(c) = c^2$.

مسئله ۶. تابع $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید تابع f پیوسته یکنواخت است.

مسئله ۷. فرض کنید $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه x_0 پیوسته و $f(x_0) > 0$ ثابت کنید عددی مثبت مانند δ وجود دارد که اگر $x \in S$ و $|x - x_0| < \delta$ ، آنگاه $f(x) > 0$.

مسئله ۸. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را پیوسته در $+\infty$ می‌نامیم اگر برای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ و $A \in \mathbb{R}$ موجود باشند به طوری که برای هر $x_1 > A$ و $x_2 > A$ ، هرگاه $|x_1 - x_2| < \delta$ ، آنگاه داشته باشیم $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. پیوستگی در $-\infty$ نیز به طریق مشابه تعریف می‌شود. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است و در $+\infty$ و $-\infty$ نیز پیوسته است. نشان دهید f در دامنه \mathbb{R} به طور یکنواخت پیوسته است.

مسئله ۸. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ را محاسبه کنید.

مسئله ۹. مقدار c را چنان محاسبه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4$$