تمرین سری چهارم - کارگاه حل مسئله ریاضی عمومی ۱

دوشنبه ۱۳ آبان ۹۸

مسئله ۱. اگر $a \in \mathbb{R}$ ، ثابت کنید معادله زیر دست‌کم یک جواب حقیقی دارد.

$$(a^2+1)cosx + 2a = 0$$

مسئله ۲. فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته، و α و β دو عدد حقیقی مثبت باشند به‌طوری‌که $\alpha + \beta = 1$. ثابت کنید به‌ازای هز دو عدد حقیقی $x_0, y_0 \in [a,b]$ ، عدد $c \in [a,b]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(c) = \alpha f(x_0) + \beta f(y_0)$.

مسئله ۳. فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نقاطی در فاصله $[a,b]$ باشند. نشان دهید $c \in [a,b]$ وجود دارد که:

$$\frac{n(n+1)}{2} f(c) = f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + nf(x_n)$$

مسئله ۴. تابع پیوسته $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $f(1) = f(0)$، ثابت کنید $c \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$ وجود دارد که $f(c) = f(c+\frac{1}{3})$.

مسئله ۵. فرض کنید $f : [a,b] \to [a,b]$ پیوسته باشد. (توجه کنید که برد f زیرمجموعه‌ای از $[a,b]$ است.) ثابت کنید دست‌کم یک نقطه مانند x در $[a,b]$ وجود دارد که $f(x) = x$. نقطه‌ای با این ویژگی را **نقطه ثابت** f می‌نامند.

مسئله ۶. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ داده شده است. تابع $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$|f|(x) = |f(x)|$$

ثابت کنید که اگر f در نقطه‌ای پیوسته باشد، $|f|$ نیز در آن نقطه پیوسته است. آیا عکس آن نیز درست است؟

مسئله ۷. درباره تابع $f : S \to \mathbb{R}$ می‌دانیم که به ازای عددی غیرمنفی مانند L و به‌ازای هر دو عدد در S مانند x_1 و x_2 ،

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2|$$

ثابت کنید f به طور یکنواخت پیوسته است.

مسئله ۵. شخصی مسیر ۶ کیلومتری را در ۳۰ دقیقه طی می‌کند. نشان دهید مسافتی یک کیلومتری از این مسیر وجود دارد به‌طوری که این شخص آن را دقیقا در ۵ دقیقه طی می‌کند.

مسئله ۸. اگر $f, g : X \to \mathbb{R}$ دو تابع پیوسته باشند، ثابت کنید تابع $max(f,g) : X \to \mathbb{R}$ نیز پیوسته است.

مسئله ۹. ثابت کنید اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، fof نزولی اکید نیست.

مسئله ۱۰. اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در رابطه $f(x+y) = f(x) + f(y)$ برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ صدق کند و f در لااقل یک نقطه پیوسته

باشد، در این‌صورت ثابت کنید عدد ثابت c وجود دارد که : $f(x) = cx$ برای هر x.

مسئله ۱۱. اگر I بازه‌ای کراندار باشد و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته یکنواخت باشد ثابت کنید f کراندار است.

مسئله ۱۲. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم که در آن c یک عدد حقیقی است:

$$f(x) = \begin{cases} c & x = ۰ \\ sin(\frac{۱}{x}) & x \neq ۰ \end{cases}$$

ثابت کنید عدد c هرچه باشد، f در نقطه c پیوسته نیست. آیا این تابع در سایر نقاط پیوسته است؟

مسئله ۱۳. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم: $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$. ثابت کنید برد تابع f، $\mathbb{R}$ است.

مسئله ۱۴. تابع حقیقی f به‌صورت زیر تعریف شده است. نقاط ناپیوستگی این تابع را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{n} & x = \frac{m}{n}, \quad \gcd(m,n) = ۱ \\ ۰ & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

مسئله ۱۵. مثالی از یک تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ویژگی گفته شده بزنید:

(آ) در همه‌جا به‌غیر از ۱ و ۲ و ۳ پیوسته باشد.

(ب) همه‌جا جز اعداد صحیح پیوسته باشد.

(پ) به‌غیر از مجموعه $\{\frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ پیوسته باشد.

(ت) فقط در ۱ و ۲ پیوسته باشد.

مسئله ۱۶. ثابت کنید هر تابع محدب $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ پیوسته است. همچنین اگر g یک تابع محدب صعودی روی بازه شامل $f(I)$ باشد، آنگاه gof روی I محدب است.

مسئله ۱۷. فرض کنید S یک زیرمجموعه نامتناهی شمارا از $\mathbb{R}$ باشد. نگاشت $\delta : \mathbb{N} \to S$ یک نگاشت دوسویی است. برای هر x تعریف می‌کنیم :

$$f(x) = \sum_{\{n:\delta(n) \leq x\}} ۲^{-n}$$

ثابت کنید f تابعی صعودی است و خارج از مجموعه S پیوسته است و روی S پیوسته نیست. (اگر $S = \mathbb{Q}$ باشد، آنگاه مثالی از یک تابع صعودی بدست می‌آوریم که روی اعداد گویا ناپیوسته و در اعداد گنگ پیوسته است.)

مسئله ۱۸. مثالی از یک تابع کراندار پیوسته روی یک بازه کراندار بیاورید که پیوسته یکنواخت نباشد.