

تمرین سری سوم - کارگاه حل مسئله ریاضی عمومی ۱

چهارشنبه ۱ آبان ۹۸

مسئله ۱.

الف) همهی جواب‌های معادله‌ی $z^2 + z + 1 = 0$ را در مجموعه اعداد مختلط \mathbb{C} بیابید.

ب) همهی جواب‌های معادله‌ی $z^6 + z^3 + 1 = 0$ را در مجموعه اعداد مختلط \mathbb{C} بیابید.

مسئله ۲. معادله مختلط $z^6 = \frac{1+i}{1-i}$ را حل کنید و تعیین کنید ریشه‌های این معادله در صفحه اعداد مختلط رئوس چه شکلی هستند؟

مسئله ۳. در هر یک از دو مورد زیر مجموعه‌ی اعداد مختلطی را که در روابط زیر صدق می‌کنند مشخص کنید و این نقاط را در صفحه‌ی مختلط نمایش دهید.

الف) $z^4 - 2iz^2 - 1 = 0$

ب) $Re(z^3) < Im(z^3)$

مسئله ۴.

الف) از چند رقم پس از ممیز عدد $8/1934620725\dots$ استفاده کنیم تا خطای محاسبه مجذور آن از 10^{-3} بزرگتر نشود؟

ب) عدد حقیقی $A = 4615/a_1a_2a_3\dots$ که در مبنای ۱۰ نوشته شده است را در نظر بگیرید. عدد مختومه‌ی $a_1\dots a_n/4615$ را با A_n نمایش می‌دهیم. تعیین کنید n را چقدر بگیریم که تفاوت A^2 و A_n^2 از 10^{-2} کوچکتر باشد.

مسئله ۵. ثابت کنید اگر دنباله‌ی اعداد نامنفی a_1, a_2, a_3, \dots به عدد a همگرا باشد آنگاه دنباله‌ی $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \dots$ به \sqrt{a} همگراست.

مسئله ۶. برای هر عدد طبیعی n ، همهی اعداد مختلط مانند z را بیابید که $z^n = \bar{z}$.

مسئله ۷. دنباله a_n از اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} a_1 = 0, a_2 = 1 \\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \quad (n > 2) \end{cases}$$

الف) I_n را بازه‌ای در نظر بگیرید که دو سر آن a_n و a_{n+1} است. ثابت کنید $I_{n+1} \subseteq I_n$.

ب) ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ وجود دارد.

مسئله ۸. ثابت کنید اگر $|a| < 1$ آنگاه دنباله $x_n = a^n$ به صفر همگراست.

مسئله ۹. دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد حقیقی در رابطه‌ی بازگشتی $a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$ ($0 < a_1 < \frac{1}{2}$) صدق می‌کند. نشان دهید این دنباله صعودی است.

مسئله ۱۰.

الف) دو عدد گنگ در بین صفر و یک مثال بزنید که رقم اول بعد از ممیز در بسط اعشاری آن‌ها متفاوت باشد ولی فاصله‌شان از 10^{-1000} کمتر باشد.

ب) فرض کنید α عددی گنگ باشد. نشان دهید اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای حقیقی و همگرا به α باشد، آنگاه عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که هزار رقم اول در بسط اعشاری همه‌ی اعداد $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ برابر است.

مسئله ۱۱. معادله‌ی $(1 + \sqrt{3}i)(z + i)^n = (1 - \sqrt{3}i)(z - i)^n$ را حل کنید.

مسئله ۱۲. ریشه‌های سوم $5i$ را به صورت $a + ib$ بدست آورید.

مسئله ۱۳. دنباله‌ی $\{a_n\}$ را به صورت

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ مرتبه}}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید a_n همگراست و حد آن را حساب کنید.

مسئله ۱۴. در هر مورد ثابت کنید دنباله‌ی a_n به صفر همگراست:

الف) $a_n = \frac{n}{z^n}$ ($|z| > 1, z \in \mathbb{C}$)

ب) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

ج) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$