

## تمرین سری دوم - کارگاه حل مسئله ریاضی عمومی ۱

دوشنبه ۲۲ مهر ۹۸

مسئله ۱. ثابت کنید

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

و نتیجه بگیرید که اگر  $z_1, z_2 \neq 0$  و  $\theta$  زاویه میان نیم‌خط‌های واصل از  $0$  به  $z_1$  و  $z_2$  باشد:

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)}{|z_1| |z_2|}$$

مسئله ۲. در هر مورد، مجموعه نقاطی که در رابطه داده شده صدق می‌کنند را توصیف کنید:

الف)  $|z - i| > 2|z + i|$

ب)  $\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Im}(z^2)$

ج)  $\operatorname{Re}(z + 1) = |z|$

مسئله ۳. ثابت کنید  $\cos n\theta$  که در آن  $n$  یک عدد طبیعی است، را می‌توان به صورت یک چندجمله‌ای برحسب  $\cos \theta$  نوشت.

مسئله ۴. ثابت کنید هر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی از درجه فرد دست کم یک ریشه حقیقی دارد.

مسئله ۵. اگر  $P$  نمایش نقطه  $z$  و  $Q$  نمایش نقطه  $z + \frac{1}{z}$  باشد، نشان دهید اگر  $P$  روی دایره  $|z| = 2$  حرکت کند آن‌گاه  $Q$  روی یک بیضی حرکت می‌کند. معادله این بیضی را بیابید.

مسئله ۶. فرض کنید  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  دنباله کران‌دار است (یعنی  $M$  وجود دارد که برای هر  $n$ ،  $|a_n| \leq M$ ). ثابت کنید اگر  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  یکنوا باشد، همگرا است.

مسئله ۷. ثابت کنید معادله زیر برای  $a, c \in \mathbb{R}$  و  $b \in \mathbb{C}$  معادله یک دایره است:

$$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$$

مسئله ۸.

الف) ثابت کنید هر دنباله حقیقی دل‌خواه یک زیردنباله یکنوا دارد.

ب) (قضیه بولتزانو - وایرستراس) ثابت کنید هر دنباله حقیقی دل‌خواه کران‌دار، یک زیردنباله همگرا دارد.

مسئله ۹. ثابت کنید دنباله  $\left\{ \frac{F_{n+1}}{F_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  همگرا است و حد آن را بیابید ( $F_n$  دنباله فیبوناتچی است).

مسئله ۱۰. فرض کنید  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد و  $c_n = a_n + ib_n$ . ثابت کنید  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c^*$  اگر و تنها اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \operatorname{Re}(c^*) \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \operatorname{Im}(c^*)$$

مسئله ۱۱. فرض کنید  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  دو دنباله صعودی از اعداد حقیقی نامنفی باشند و عددی طبیعی مانند  $k$  یافت شود به‌قسمی که:

$$n \geq k \implies a_n \leq b_n$$

الف) ثابت کنید اگر  $\{b_n\}$  همگرا باشد،  $\{a_n\}$  نیز همگرا است.

ب) ثابت کنید اگر  $\{a_n\}$  واگرا باشد،  $\{b_n\}$  نیز واگرا است.

مسئله ۱۲. فرض کنید  $P(z)$  یک چندجمله‌ای غیر ثابت باشد که تمام ریشه‌های آن در ناحیه اول و چهارم قرار دارند. ثابت کنید ریشه‌های  $P'(z)$  نیز همین خاصیت را دارند.

مسئله ۱۳. فرض کنید  $z, w$  دو عدد مختلط باشند که  $|w| \leq 1$ ،  $|z| \leq 1$  و  $w\bar{z} \neq 1$ . نشان دهید

$$\left| \frac{w-z}{1-w\bar{z}} \right| \leq 1$$

و تساوی فقط وقتی برقرار است که دست‌کم یکی از  $z, w$  روی دایره واحد باشد.

مسئله ۱۴. فرض کنید  $P(z)$  یک چندجمله‌ای مختلط از درجه  $n > 1$  باشد و اعداد مختلط  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ریشه‌های  $P$  باشند. نشان دهید

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \alpha_i}$$

مسئله ۱۵. نشان دهید ریشه‌های  $P'(z)$  درون یا روی پوش محدب ریشه‌های  $P(z)$  قرار دارند.