تمرین سری اول_ کارگاه حل مسأله ریاضی عمومی۱

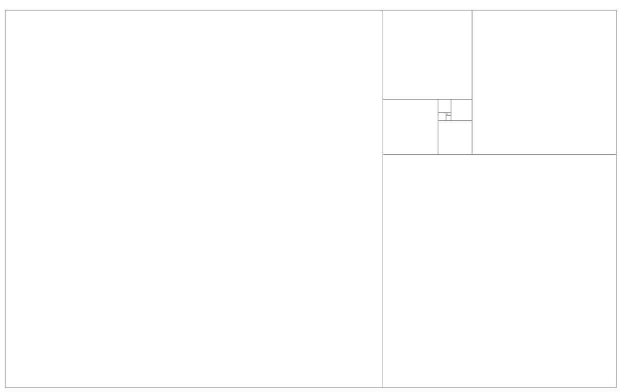
دوشنبه ۱۵ مهر ۹۸

مسئله ۱. ثابت کنید $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ گویا نیست.

مسئله ۲. فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند که دست‌کم یکی از آن‌ها مربع کامل نیست. ثابت کنید: $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ گویا نیست.

مسئله ۳. باستانیان مستطیلی را متناسب‌ترین مستطیل قلمداد می‌کردند که اگر مربعی که طول ضلعش برابر با عرض مستطیل است از مستطیل برداشته شود، مستطیل به‌دست آمده با مستطیل اولیه متشابه باشد. مستطیلی با این ویژگی، مستطیل طلایی نامیده می‌شود. نخست ثابت کنید نسبت طول به عرض مستطیل به‌دست آمده برابر نسبت طلایی ($\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$) است.

حال فرض کنید عمل برداشتن مربعی را که طول ضلعش برابر با عرض مستطیل است، درمورد مستطیل کوچکتر نیز انجام دهیم و این عمل را به‌طور پیاپی تکرار کنیم. با استفاده از این فرایند و به روشی مشابه روش هیپاسوس ثابت کنید نسبت طلایی گویا نیست.



مسئله ۴. برای هریک از مجموعه‌های زیر از $\mathbb{R}$، مجموعه‌های کران‌های بالا و کران‌های پایین و کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین را، درصورت وجود، پیدا کنید.

- $\{\frac{۱}{n} : n\in\mathbb{N}\}$
- $\{\frac{(-۱)^n}{n} : n\in\mathbb{Z}, n\neq ۰\}$
- $\{x : x\in\mathbb{Q}, x^۲<۲\}$
- $\{x : x^۲-x-۱>۰\}$

مسئله ۵. زیرمجموعه S از $\mathbb{R}$ داده شده است. مجموعه کران‌های بالای S را به U و مجموعه کران‌های پایین S را با L نمایش می‌دهیم. هر نقطه $\mathbb{R}$ که عضو $S\cup U\cup L$ نباشد یک **نقطه حفره‌ای** برای S می‌نامیم و مجموعه نقاط حفره‌ای را با Gنمایش می‌دهیم. نشان دهید مجموعه‌های L، U و $S\cup G$ هرسه بازه هستند.

مسئله ۶. (خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی) اگر a و b عددهایی حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $na > b$.

مسئله ۷. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه ناتهی $\mathbb{R}$ باشند. مجموعه $A+B$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

ثابت کنید اگر A و B از بالا کران‌دار باشند، $A+B$ نیز از بالا کران‌دار است و کوچک‌ترین کران بالای $A+B$ برابر با مجموع کوچکترین کران‌های بالای A و B است.

مسئله ۸. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای این‌که عدد مثبت a بیش از یک نمایش اعشاری داشته باشد این است که نمایشی مختوم داشته باشد.

مسئله ۹. ثابت کنید عددی حقیقی مانند x وجود دارد که $x^۳ = ۵$.

مسئله ۱۰. (قضیه کانتور) فرض کنید

$$a_۱ < a_۲ < a_۳ < \cdots < b_۳ < b_۲ < b_۱$$

و به‌ازای هر عدد مثبت، مانند e، عددی طبیعی، مانند n، وجود دارد به‌نحوی که $b_n - a_n < e$. در این‌صورت، اشتراک بازه‌های $[a_n, b_n]$ ، $n \geq ۱$ ، دقیقا از یک نقطه تشکیل شده است. این قضیه را که تعمیمی از صورت اول اصل تمامیت است، ثابت کنید.

مسئله ۱۱. فرض کنید $z_۱$ و $z_۲$ دو عدد مختلط باشند به‌طوری که $|z_۲| = |z_۱| = ۱$ و $z_۱ z_۲ \neq -۱$. ثابت کنید $\frac{z_۱+z_۲}{۱+z_۱ z_۲}$ عددی حقیقی است.

مسئله ۱۲. فرض کنید α عددی مختلط باشد به‌طوری که $\alpha + \frac{۱}{\alpha} = ۱$. مقدار α را بیابید و سپس $\alpha^{۲۰} + \frac{۱}{\alpha^{۲۰}}$ را محاسبه کنید.

مسئله ۱۳. نمایش هندسی نقاطی از صفحه مختلط مانند z را بیابید به طوری که:

$$|z + \frac{۱}{z}| = ۲$$

مسئله ۱۴. فرض کنید در مثلث ABC، G مرکز ثقل مثلث(محل تلاقی میانه‌ها) و H مرکز ارتفاعی مثلث و O دایره محیطی باشد. ثابت کنید:

$$OH = ۳OG$$