مقدمه‌ای بر منطق کوانتومی

علی الماسی

۳۱ مرداد ۱۴۰۱

چکیده

یکی از مهم‌ترین دستاورد های علمی قرن بیستم را می‌توان ابداع و مطالعه‌ی مکانیک کوانتومی و تلاش در راستای توصیف رده‌ی وسیعی از پدیده‌های فیزیکی در چهارچوب این تئوری دانست. نظریه‌ای که نه‌تنها فیزیک و علوم تجربی وابسته به آن را تحت تأثیر قرار داده است بلکه منشأ ایجاد پرسش‌هایی مهم و پیشرفت‌هایی قابل توجه در ریاضیات و علوم کامپیوتر نیز بوده است. آنچه در این گزارش اجمالاً به آن خواهیم پرداخت، ناظر به یکی از جنبه‌های چنین ارتباطاتی بین ریاضیات و مکانیک کوانتومی است.

از نظر تاریخی، مقاله‌ی پیشتازانه‌ی بیرکهف[1] و فون نویمان[2]، «منطق مکانیک کوانتومی»، که در نیمه‌ی اول قرن بیستم منتشر شده است را می‌توان اولین اثر شاخص در حوزه‌ی منطق کوانتومی دانست. اگرچه برای چند دهه پس از انتشار این مقاله، منطق کوانتومی صرفاً مورد توجه ریاضیدانانی بود که با علایق نظری، و با رویکرد عمدتاً جبری (مثلا نظریه‌ی رسته‌ها، نظریه‌ی مشبکه‌ها و ...) به توسعه‌ی این حوزه از منطق می‌پرداختند، با گرم‌شدن بازار محاسبات کوانتومی در اواخر قرن بیستم، رویکردهای جدیدی نسبت به منطق کوانتومی شکل گرفت که می‌توان یکی از مهم‌ترین آن‌ها را رویکرد دینامیکی به منطق کوانتومی دانست.

یکی از اولین مقالاتی که نویسندگان آن سعی در توسعه‌ی منطقی داشته‌اند که به وجه دینامیکی سیستم‌های کوانتومی توجه دارد و سعی می‌کند در جهت ارائه‌ی یک سیستم اثبات برای برنامه‌های کوانتومی حرکت کند، مقاله‌ی برونه[3] و ژوراند[4] با عنوان «منطق دینامیکی کوانتومی برای برنامه‌های کوانتومی» است. اگرچه آن‌چه امروزه عمدتاً با عنوان منطق دینامیکی کوانتومی شناخته می‌شود، نه رویکرد این دو نفر، بلکه منطقی الهام گرفته از شاخه‌ای از منطق موجهات به‌نام منطق دینامیکی گزاره‌ای است؛ پیشگامی این مقاله را در توجه به ساختن منطقی برای محاسبات کوانتومی نمی‌توان نادیده گرفت.

ما در این گزارش، ابتدا به معرفی چهارچوب مکانیک کوانتومی خواهیم پرداخت و بدین منظور، برخی مفاهیم ریاضی مورد نیاز را مرور خواهیم کرد؛ سپس به نحو و معناشناسی فون نویمان و بیرکهف برای منطق کوانتومی اشاره خواهیم کرد و نهایتاً، توجه خود را به بررسی محتوای مقاله‌ی ژوراند و برونه معطوف خواهیم کرد.

۱ مقدمه‌ای بر مکانیک کوانتومی

در دینامیک کلاسیک حالت هر ذره را می‌توان با یک شش‌تایی $(r_1, \ldots, r_6)$ از اعداد حقیقی مشخص کرد که در آن سه مؤلفه‌ی اول مشخص‌کننده‌ی مکان و سه مؤلفه‌ی دوم مشخص‌کننده‌ی تکانه هستند. افزون بر این،

[1] G. D. Birkhoff

[2] J. Von Neumann

[3] O. Brunet

[4] P. Jorrand

حرکت این ذره (تحول سیستم) را می‌توان توسط معادلات همیلتون–یاکوبی[5] توصیف کرد. در مکانیک کوانتومی فضای حالات یک ذره به جای $\mathbb{R}^6$ ، یک فضای هیلبرت است و معادله‌ی توصیف‌کننده‌ی تحول سیستم، معادله‌ی شرودینگر.

پیش از بیان اصول موضوعه مکانیک کوانتومی، بعضی از مفاهیم مورد نیاز را مرور می‌کنیم.

۱.۱ مروری بر ریاضیات مورد نیاز

منظور از فضای هیلبرت، یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط است که به یک ضرب داخلی مجهز شده است و نسبت به نرم القا شده از آن ضرب داخلی، کامل است؛ یعنی هر دنباله‌ی کوشی در آن همگراست.

اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، $X \subseteq \mathcal{H}$ را یک زیرفضای بسته‌ی $\mathcal{H}$ می‌نامیم هرگاه اولاً تحت ترکیب خطی بسته باشد و ثانیاً حد هر دنباله کوشی از اعضای X خودش عضوی از X باشد. مجموعه‌ی همه‌ی زیرفضاهای بسته‌ی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را با $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم. برای بردار $\varphi \in \mathcal{H}$ منظور از $\langle\varphi\rangle$ زیرفضای تولید شده توسط این بردار است.

برای هر زیرفضای S از فضای برداری $\mathcal{H}$ مقصود از زیرفضای عمود بر S مجموعه‌ی

$$S^{\perp} = \{t \in \mathcal{H} \ : \ \forall s \in S \ (t \perp s)\}$$

است. می‌دانیم $S^{\perp}$ یک زیرفضای بسته‌ی $\mathcal{H}$ است و اگر S یک زیرفضای بسته باشد، داریم: $S = (S^{\perp})^{\perp}$.

اگر $f : \mathcal{H}_۱ \to \mathcal{H}_۲$ یک نگاشت خطی باشد، عملگر الحاقی f که آن را با $f^{\dagger} : \mathcal{H}_۲ \to \mathcal{H}_۱$ نشان می‌دهیم، به این صورت تعریف می‌شود که برای هر $\varphi \in \mathcal{H}_۱$ و $\psi \in \mathcal{H}_۲$ داریم:

$$\langle \varphi, f^{\dagger}(\psi)\rangle_۱ = \langle f(\varphi), \psi\rangle_۲$$

اگر f نگاشتی کران‌دار باشد، $f^{\dagger}$ یکتا وجود دارد که کران‌دار است.

مقصود از نگاشت تصویر $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ، یک نگاشت خطی کران‌دار است که خودتوان و خودالحاق باشد. به عبارت دیگر، داشته باشیم: $P = P^۲ = P^{\dagger}$. در یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های تصویر را با $\Pi(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ تناظر یک‌به‌یکی بین $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ و $\Pi(\mathcal{H})$ وجود دارد.

منظور از یک نگاشت هرمیتی روی $\mathcal{H}$ نگاشت خطی و کران‌داری مانند $H : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ است به طوری که $H^{\dagger} = H$.

اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، نگاشت خطی و کران دار $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ را یکانی گوییم هرگاه $UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = I$ که در آن I نگاشت همانی است. معادلاً U یکانی است هرگاه برای هر $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ ، داشته باشیم:

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \langle U\psi | U\varphi \rangle$$

که در آن مقصود از $\langle \psi | \varphi \rangle$ ، ضرب داخلی این دو بردار است.

نمادگذاری بالا نمونه‌ای از روش رایجی است که در مکانیک کوانتومی برای نمایش بردارها استفاده می‌شود

[5] Hamilton-Jacobi equations

که به آن نمادگذاری دیراک[6] می‌گویند و ما نیز در طول این گزارش از ان استفاده خواهیم کرد. در این نمادگذاری، هر بردار $v \in \mathcal{H}$ را با $|v\rangle$ و $|v\rangle^\dagger$ را با $\langle v|$ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب، ضرب داخلی دو بردار $u, v \in \mathcal{H}$ ، برابر با $\langle u| |v\rangle$ است که آن را مختصراً به صورت $\langle u|v\rangle$ نمایش خواهیم داد.

اگر $\mathcal{H}_۱$ و $\mathcal{H}_۲$ دو فضای هیلبرت باشند، یک روش ساختن فضای هیلبرت بزرگتری از روی $\mathcal{H}_۱$ و $\mathcal{H}_۲$ استفاده از ضرب تانسوری است. مقصود از ضرب تانسوری $\mathcal{H}_۱$ و $\mathcal{H}_۲$ ، که آن را با $\mathcal{H}_۱ \otimes \mathcal{H}_۲$ نمایش می‌دهیم، یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است که شرایط زیر را برآورده کند.

۱. نگاشت $\otimes : \mathcal{H}_۱ \times \mathcal{H}_۲ \to \mathcal{H}$ وجود داشته باشد که:

   (آ) نسبت به هر مؤلفه خطی باشد

   (ب) برای هر $\psi \in \mathcal{H}_۱$ و $\varphi \in \mathcal{H}_۲$ و هر $c \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

$$c(\psi \otimes \varphi) = (c\psi) \otimes \varphi = \psi \otimes (c\varphi)$$

۲. هر بردار $\mathcal{H}$ را بتوان به صورت ترکیب خطی از بردار های مجموعه‌ی

$$\{\psi \otimes \varphi : \psi \in \mathcal{H}_۱, \varphi \in \mathcal{H}_۲\}$$

نوشت.

۲.۱ اصول موضوعه‌ی مکانیک کوانتومی

اصل ۱. فضای حالت

برای هر سیستم کوانتومی بسته، فضای هیلبرت مختلط $\mathcal{H}$ وجود دارد به طوری که هر حالت سیستم متناظر با یک زیرفضای یک‌بعدی $\mathcal{H}$ می‌باشد. مجموعه‌ی همه‌ی زیرفضاهای یک‌بعدی $\mathcal{H}$ را با $\Sigma(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف. حالت‌های نامتعامد و متعامد

برای هر $s, t \in \Sigma(\mathcal{H})$ ، s و t را **نامتعامد** گوییم و می‌نویسیم $s \to_{\mathcal{H}} t$ هر گاه $u \in s$ و $v \in t$ موجود باشند به طوری که $\langle u|v\rangle \neq ۰$. در غیر این صورت s و t را **متعامد** گوییم.

سنگ بنای نظریه اطلاعات و محاسبات کلاسیک را می‌توان مفهوم بیت دانست؛ سیستمی که می‌تواند مقادیر ۰ یا ۱ را اتخاذ کند. معادل کوانتومی یک بیت را **کیوبیت** می‌نامیم. فضای حالت یک کیوبیت یک فضای هیلبرت دو بعدی مختلط است و حالت هر کیوبیت برداری به فرم

$$|\psi\rangle = \alpha\,|۰\rangle + \beta\,|۱\rangle$$

است که در آن $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = |۰\rangle$ و $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = |۱\rangle$ بردارهای پایه‌ی $\mathbb{C}^۲$ هستند.

اصل ۲. تست‌کردن یک ویژگی

[6] Dirac's notation

منظور از یک تست در یک سیستم کوانتومی با فضای حالات $\mathcal{H}$ نگاشت تصویری مانند $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ است. اگر سیستم در حالت φ باشد، با انجام یک تست روی سیستم، حالت سیستم تغییر می‌کند. به این صورت که با احتمال $\langle \varphi | (P(\varphi)) \rangle$ حالت سیستم پس از اعمال تست، $\langle P(\varphi) \rangle$ خواهد بود (در این حالت می‌گوییم نتیجه‌ی تست مثبت است) و با احتمال $\langle \varphi | (I-P)(\varphi)) \rangle$ حالت سیستم پس از اعمال تست، $\langle (I-P)(\varphi) \rangle$ خواهد بود (در این حالت می‌گوییم نتیجه تست منفی است).

اصل ۳. تحول یک سیستم

تحول یک سیستم کوانتومی با معادله شرودینگر توصیف می‌شود که به صورت زیر است.

$$i\hbar \frac{\partial v(t)}{\partial t} = H(t)(v(t))$$

که در آن $\langle v(t) \rangle$ حالت سیستم در لحظه‌ی t، $\hbar$ ثابت پلانک و $H(t)$ یک نگاشت هرمیتی روی $\mathcal{H}$ است که به آن همیلتونی می‌گویند.

اگر همیلتونی مستقل از زمان باشد، در این صورت با حل کردن معادله دیفرانسیل فوق خواهیم دید که تحول حالت سیستم به صورت اعمال یک نگاشت یکانی بر حالت فعلی سیستم است. بالعکس، برای هر نگاشت یکانی U، همیلتونی H وجود دارد به طوری که اعمال نگاشت U را بتوان با همیلتونی H توصیف کرد. لذا تحول سیستم‌های کوانتومی را می‌توان معادل با اعمال نگاشت‌های یکانی دانست.

برای یک کیوبیت سه نگاشت یکانی زیر که به گیت‌های پائولی[7] معروفند از اهمیت ویژه‌ای در محاسبات کوانتومی برخوردارند.

$$\sigma_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

افزون بر این، نگاشت زیر که به گیت هادامارد[8] معروف است نیز در آنچه در ادامه خواهیم گفت به کار گرفته خواهد شد.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

اصل ۴. سیستم‌های مرکب

اگر دو سیستم کوانتومی فضاهای حالت $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ را داشته باشند، فضای حالت سیستم متشکل از هر دوی آن‌ها برابر $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ است.

به عنوان مثال، یک سیستم مرکب متشکل از دو کیوبیت می‌تواند در هر یک از چهار حالت زیر (که به حالات بل[9] مشهورند) قرار گیرد.

[7] Pauli gates
[8] Hadamard gate
[9] Bell states

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left|۰۰\right\rangle + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left|۱۱\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ ۰ \\ ۰ \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{pmatrix}$$

$$\left|\Phi^-\right\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left|۰۰\right\rangle - \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left|۱۱\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ ۰ \\ ۰ \\ -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{pmatrix}$$

$$\left|\Psi^+\right\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left|۰۱\right\rangle + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left|۱۰\right\rangle = \begin{pmatrix} ۰ \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\left|\Psi^-\right\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left|۰۱\right\rangle - \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left|۱۰\right\rangle = \begin{pmatrix} ۰ \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ ۰ \end{pmatrix}$$

توجه کنید که در بالا به اختصار از $\left|ij\right\rangle$ به جای $\left|i\right\rangle \otimes \left|j\right\rangle$ استفاده کرده‌ایم.

۲ منطق کوانتومی

در بخش قبل با جهانی که قرار است جملات زبان منطق کوانتومی را در آن تعبیر کنیم آشنا شدیم. در ادامه سعی می‌کنیم زبان و معناشناسی منطق کوانتومی که توسط فون نویمان و بیرکهف معرفی شد را بیان کنیم.

۱.۲ مرور تعاریفی از جبر

تعریف. مجموعه‌ی جزئی مرتب

یک مجموعه‌ی جزئی مرتب، یک دوتایی $\mathfrak{P} = (P, \leq)$ است که در آن P ناتهی و $\leq$ رابطه‌ای بازتابی، پادتقارنی و ترایایی روی P است.

تعریف. مشبکه

مقصود از یک مشبکه، یک مجموعه‌ی جزئی‌مرتب مانند $\mathfrak{L} = (L, \leq)$ است که در آن به ازای هر $a, b \in L$ یک اینفیمم(که آن را با $a \wedge b$ نشان می‌دهیم) و یک سوپریمم(که آن را با $a \vee b$ نشان می‌دهیم) وجود دارد.

تعریف. مشبکه‌ی کامل

مشبکه‌ی $\mathfrak{L} = (L, \leq)$ را کامل می‌گوییم هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی $X \subseteq L$، اینفیمم و سوپریمم X موجود باشند.

تعریف. مشبکه توزیع‌پذیر

مشبکه $\mathfrak{L} = (L, \leq)$ را توزیع‌پذیر گوییم هرگاه برای هر $a, b, c \in L$ داشته باشیم

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

تعریف. مشبکه متعامد

مشبکه $\mathfrak{L} = (L, \leq)$ را متعامد گوییم هرگاه

۱. $I, O \in L$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $a \in L$، $O \leq a \leq I$.

۲. برای هر $a \in L$، عضوی یکتا در L مانند a' وجود داشته باشد به طوری که :

(آ) $a = (a')'$.

(ب) $a \leq b \Rightarrow b' \leq a'$.

(ج) $a \wedge a' = O$.

(د) $a \vee a' = I$.

در ادامه، هر مشبکه‌ی متعامد را به‌صورت $\mathfrak{L} = (L, \leq, \wedge, \vee, (.)^{\perp}, O, I)$ نمایش خواهیم داد.

به سادگی می‌توان دید که هر مشبکه‌ی توزیع‌پذیر و متعامد، یک جبر بول است. همچنین توجه کنید که در یک مشبکه‌ی متعامد، نگاشت $(.)'$ که به صورت $a \mapsto a'$ عمل می‌کند، یک تابع است که در بعضی منابع، آن را نگاشت متعامد مکمل‌گیری می‌نامند.

۲.۲ نحو و معناشناسی منطق کوانتومی سنتی

برای ساختن منطق کوانتومی نیاز است «زبان» و «جهان» (یا حداقل مدلی از جهان) را مشخص کنیم. زبان منطق گزاره‌ای کوانتومی را می‌توان به صورت مشابهی با زبان منطق گزاره‌ای کلاسیک به صورت

$$\varphi ::= p | \neg\varphi | \varphi \wedge \varphi$$

تعریف کرد که در آن $p \in \mathbf{P}$ است و مقصود از $\mathbf{P}$ مجموعه‌ی گزاره‌های اتمی است. همچنین، برای دو گزاره‌ی دلخواه φ و ψ مخفف‌سازی‌های زیر را به کار خواهیم برد:

$$\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$
$$\varphi \to \psi := \neg\varphi \vee \psi$$
$$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

مجموعه‌ی همه‌ی گزاره‌های زبان منطق گزاره‌ای کوانتومی را با $Form$ نمایش می‌دهیم.

پیش از آن که معناشناسی منطق گزاره‌ای کوانتومی را بیان کنیم، به این توجه کنید که برای هر فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، ساختار $\langle \mathcal{C}(\mathcal{H}), \subseteq, \cap, \sqcup, (.)^{\perp}, \{\circ\}, \mathcal{H}\rangle$ یک مشبکه‌ی کامل متعامد است که در آن $\subseteq$ و$\cap$ به ترتیب عملگرهای شمول و اشتراک، $\sqcup$ عملگر بستار جمع مستقیم و $(.)^{\perp}$ عملگر مکمل‌گیری هستند. به چنین مشبکه‌هایی، **مشبکه‌ی هیلبرت** نیز گفته می‌شود.

تعریف. تابع تعبیر

منظور از یک تابع تعبیر، تابعی مانند $[\![.]\!] : Form \to \mathcal{C}(\mathcal{H})$ است، به‌طوری‌که برای هر $\varphi, \psi \in Form$:

۱. $[\![\neg\varphi]\!] = [\![\varphi]\!]^{\perp}$

۲. $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$

تعریف. تحقق جبری

منظور از یک تحقق جبری، دوتایی $(\mathcal{H}, [\![.]\!])$ است که در آن $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $[\![.]\!]$ یک تابع تعبیر با برد $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ است.

حال راستی گزاره‌ی φ با تحقق جبری $(\mathcal{H}, [\![.]\!])$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

تعریف. راستی در منطق گزاره‌ای کوانتومی

گوییم گزاره‌ی φ با تحقق جبری $(\mathcal{H}, [\![.]\!])$ راست است اگر و تنها اگر $\mathcal{H} = [\![\varphi]\!]$. در این صورت به $(\mathcal{H}, [\![.]\!])$، یک مدل برای φ می‌گوییم.

هم‌چنین گوییم گزاره‌ی φ همانگو است اگر و تنها اگر برای هر $(\mathcal{H}, [\![.]\!])$، φ با آن تحقق جبری راست باشد.

قضیه. گزاره‌های زیر برای هر $\varphi, \psi \in From$ همانگو هستند:

$$\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$$

$$\varphi \vee \neg\varphi$$

$$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$$

یکی از تفاوت‌های منطق کوانتومی با منطق کلاسیک این است که منطق کوانتومی فاقد ویژگی توزیع‌پذیری عطف روی فصل(فصل روی عطف) است.

یافتن مثال نقضی برای این موضوع کاری ساده است. در واقع، منشا ایجاد این تفاوت بین یک مشبکه‌ی هیلبرت و یک جبر بول، در نحوه‌ی تعریف سوپریمم است. توجه کنید که یک ترکیب فصلی کوانتومی $\varphi \vee \psi$ ممکن است راست باشد، حال آن‌که هیچ‌کدام از φ و ψ راست نیستند.

۳.۲ منطقی برای برنامه‌های کوانتومی

در ادامه‌ی این گزارش از میان سیستم‌های کوانتومی، توجه خود را به سیستم‌های خاصی که فضای هیلبرت متناظر با آن‌ها به صورت $\otimes^{n}\mathbb{C}^{2}$ است معطوف می‌کنیم. همان‌گونه که پیش‌تر اشاره کردیم این سیستم‌های کوانتومی را می‌توان به صورت رجیستری متشکل از n بیت کوانتومی دید. از آن‌جا که هدف ما ساختن منطق مناسبی برای محاسبات کوانتومی است، با محدود کردن خود به چنین فضای حالاتی، چیزی از دست نخواهیم داد.

همچنین مجموعه‌ی اتم‌های زبانمان، یعنی $\mathbf{P}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{P} = \{x_i, z_i | ۱ \leq i \leq n\}$$

علاوه بر این، تابع تعبیر روی گزاره‌های این زبان این ویژگی اضافی را دارد که برای هر x_i،

$$[\![x_i]\!] = \left(\otimes^{i-۱}\mathbb{C}^۲\right) \otimes \mathbb{C}|-\rangle \otimes \left(\otimes^{n-i}\mathbb{C}^۲\right)$$

و برای هر z_i،

$$[\![z_i]\!] = \left(\otimes^{i-۱}\mathbb{C}^۲\right) \otimes \mathbb{C}|۱\rangle \otimes \left(\otimes^{n-i}\mathbb{C}^۲\right)$$

که در آن، $|-\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰\rangle - |۱\rangle)$ و $\mathbb{C}\,|\varphi\rangle = \langle\ |\varphi\rangle\ \rangle$.
همان‌طور که در بخش قبل اشاره کردیم، $\varphi \vee \psi$ مختصرسازی‌ای برای گزاره‌ی $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ است. بنابراین تعبیر آن به‌صورت

$$[\![p \vee q]\!] = [\![\neg(\neg p \wedge \neg q)]\!] = \left([\![p]\!]^{\perp} \cap [\![q]\!]^{\perp}\right)^{\perp} = [\![p]\!] \oplus [\![q]\!]$$

می‌باشد. همچنین داریم:

$$[\![p \rightarrow q]\!] = [\![p]\!]^{\perp} \oplus [\![q]\!].$$

علاوه بر این، از نمادگذاری $\varphi \veebar \psi$ به اختصار برای گزاره‌ی $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ استفاده می‌کنیم.

در بررسی سازگاری تعریف معناشناسی فوق با تعریفی که در بخش قبل ارائه دادیم، به این توجه کنید که در فضاهای هیلبرت متناهی‌البعد، جمع مستقیم دو زیرفضای بسته، بسته است.

تعریف. نتیجه‌ی منطقی

برای دو گزاره‌ی φ و ψ، گوییم ψ نتیجه‌ی منطقی φ است و می‌نویسیم $\varphi \Vdash \psi$، اگر و تنها اگر $[\![\varphi]\!] \subseteq [\![\psi]\!]$.
اگر $\varphi \Vdash \psi$ و $\psi \Vdash \varphi$، در این‌صورت می‌نویسیم

$$\varphi \dashVdash \psi$$

لازم به ذکر است که اساسا مسأله‌ی تعریف ادات شرط و معناشناسی متناظر با آن، مسأله‌ی مناقشه‌برانگیزی در منطق کوانتومی است. در مقاله‌ی ژوراند و برونه، به این مشکلات در تعریف ادات شرط اشاره نشده؛ لذا ما نیز به آن نخواهیم پرداخت.

در این‌جا خوب است که به ارتباط میان دو جمله‌ی «ψ نتیجه‌ی منطقی φ است.» و «$\varphi \rightarrow \psi$ همانگو است» توجه کنیم. اگر ψ نتیجه‌ی منطقی φ باشد، در این‌صورت طبق تعریف، $[\![\varphi]\!] \subseteq [\![\psi]\!]$. معادلا داریم: $[\![\psi]\!]^{\perp} \subseteq [\![\varphi]\!]^{\perp}$ که نتیجه می‌دهد:

$$[\![\psi]\!]^{\perp} \oplus [\![\psi]\!] \subseteq [\![\varphi]\!]^{\perp} \oplus [\![\psi]\!]$$

پس خواهیم داشت $\mathcal{H} \subseteq [\![\varphi \rightarrow \psi]\!]$؛ بنابراین «$\varphi \rightarrow \psi$ همانگو است». با این وجود، عکس این مطلب درست نیست. یعنی گزاره‌های φ و ψ وجود دارند به نحوی‌که $\varphi \rightarrow \psi$ همانگو است اما ψ نتیجه منطقی φ نیست به عنوان مثال، در نظر بگیرید $\varphi = z$ و $\psi = x$.

مثال. پیش از ادامه‌دادن بحث، مثالی از توصیف یک حالت کوانتومی با زبان و معناشناسی ارائه‌شده را خواهیم دید. حالت‌های بل را به یاد آورید. این حالت‌ها در فضای $\mathbb{C}^۲ \otimes \mathbb{C}^۲$ زندگی می‌کردند. اکنون می‌بینیم که تعبیر

گزاره‌ی

$$(z_۱ \leftrightarrow z_۲) \wedge (x_۱ \leftrightarrow x_۲)$$

حالت $|\Phi^+\rangle$ را توصیف می‌کند.

$$\begin{aligned}
[\![z_۱ \leftrightarrow z_۲]\!] &= [\![z_۱ \rightarrow z_۲]\!] \wedge [\![z_۲ \rightarrow z_۱]\!] \\
&= \left([\![z_۱]\!]^\perp \oplus [\![z_۲]\!]\right) \cap \left([\![z_۱]\!] \oplus [\![z_۲]\!]^\perp\right) \\
&= (\mathbf{C}|۰۰\rangle \oplus \mathbf{C}|۱۰\rangle \oplus \mathbf{C}|۱۱\rangle) \oplus (\mathbf{C}|۰۰\rangle \oplus \mathbf{C}|۰۱\rangle \oplus \mathbf{C}|۱۱\rangle) \\
&= \mathbf{C}|۰۰\rangle \oplus \mathbf{C}|۱۱\rangle \\
[\![x_۱ \leftrightarrow x_۲]\!] &= \mathbf{C}|++\rangle \oplus \mathbf{C}|--\rangle \\
[\![(z_۱ \leftrightarrow z_۲) \wedge (x_۱ \leftrightarrow x_۲)]\!] &= [\![z_۱ \leftrightarrow z_۲]\!] \cap [\![x_۱ \leftrightarrow x_۲]\!] \\
&= (\mathbf{C}|۰۰\rangle \oplus \mathbf{C}|۱۱\rangle) \cap (\mathbf{C}|++\rangle \oplus \mathbf{C}|--\rangle) \\
&= \mathbf{C}(|۰۰\rangle + |۱۱\rangle)
\end{aligned}$$

هدف غایی ما توسعه منطق فعلی در راستای به دست آوردن منطقی است که با آن بتوان برنامه‌های کوانتومی را توصیف کرد. هر برنامه (الگوریتم) کوانتومی به طور کلی متشکل از دو بخش است: اعمال یک سری گیت که همان نگاشت‌هایی یکانی هستند و اندازه‌گیری (تست). با در نظر گرفتن این موضوع، زبان منطق کوانتومی را به این شکل توسعه می‌دهیم که نمادهای گزاره‌ای $[u]$ را متناظر با هر نگاشت یکانی U و نمادهای گزاره‌ای $[m_z(i)]$ را متناظر با اندازه‌گیری کیوبیت iام در راستای محور z به نمادهای زبان اضافه می‌کنیم. به این ترتیب فرمول‌هایی به صورت $[u]\varphi$ که $\varphi \in Form$ است به مجموعه‌ی گزاره‌های زبان اضافه می‌شوند.

معناشناسی گزاره‌های جدید به صورت زیر تعریف می‌شود.

برای $\varphi \in Form$ و نگاشت یکانی U:

$$\begin{aligned}
[\![[u]\varphi]\!] &:= \{U\,|v\rangle \mid |v\rangle \in [\![\varphi]\!]\} \\
[\![[m_z(i)]\varphi]\!] &:= [\![\varphi \vee [\sigma_{z,i}]\varphi]\!]
\end{aligned}$$

منظور از $\sigma_{z,i}$، نگاشت $(\otimes^{i-۱}I) \otimes \sigma_z \otimes (\otimes^{n-i}I)$ است.

قضیه. داریم:

- گیت های پائولی

$$\begin{array}{llll}
[\sigma_{z,i}]\,z_i & \dashv\vdash z_i & \qquad [\sigma_{z,i}]\,x_i & \dashv\vdash \neg x_i \\
[\sigma_{x,i}]\,z_i & \dashv\vdash \neg z_i & \qquad [\sigma_{x,i}]\,x_i & \dashv\vdash x_i \\
[\sigma_{y,i}]\,z_i & \dashv\vdash \neg z_i & \qquad [\sigma_{y,i}]\,x_i & \dashv\vdash \neg x_i
\end{array}$$

- گیت هادامارد

$$[H_i]\,z_i \dashv\vdash x_i \qquad [H_i]\,x_i \dashv\vdash z_i$$

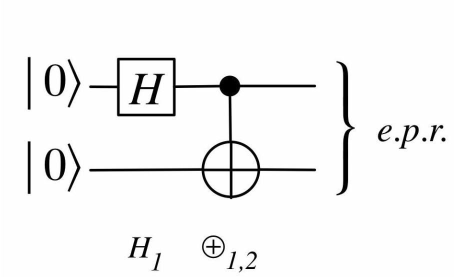
• گیت‌های $CNOT$

$$
\begin{aligned}
&[\oplus_{i,j}]\, z_i \dashv\vdash z_i \qquad && [\oplus_{i,j}]\, x_i \dashv\vdash x_i \underline{\vee} x_j \\
&[\oplus_{i,j}]\, x_j \dashv\vdash x_j \qquad && [\oplus_{i,j}]\, z_j \dashv\vdash z_j \underline{\vee} z_i
\end{aligned}
$$

۴.۲ کاربردهایی از منطق ارائه‌شده در مطالعه‌ی الگوریتم‌های کوانتومی

در بسیاری از الگوریتم‌های کوانتومی، در ابتدا فرض می‌شود که رجیستر اولیه در حالت $|0\rangle^{\otimes n}$ است. توجه کنید که در حالت $n = 2$ قرار داشتن سیستم در حالت $|00\rangle$ می‌تواند با گزاره‌ی $\neg z_1 \wedge \neg z_2$ بیان شود. در ادامه توصیف منطقی برای الگوریتمی که از روی رجیستر اولیه‌ی $|00\rangle$ حالت بل $|\Phi^+\rangle$ را تولید می‌کند، ارائه می‌دهیم.

مثال. ساختن حالت بل $|\Phi^+\rangle$



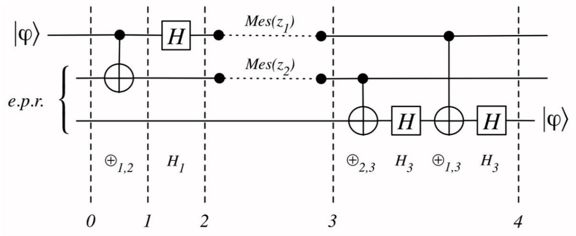
$$
\begin{aligned}
[H_1]\,(\neg z_1 \wedge \neg z_2) &\dashv\vdash [H_1]\,(\neg z_1) \wedge [H_1]\,(\neg z_2) \\
&\dashv\vdash \neg\left([H_1]\, z_1\right) \wedge \neg\left([H_1]\, z_2\right) \\
&\dashv\vdash \neg x_1 \wedge \neg z_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\oplus_{1,2}]\,[H_1]\,(\neg z_1 \wedge \neg z_2) &\dashv\vdash [\oplus_{1,2}]\,(\neg x_1 \wedge \neg z_2) \\
&\dashv\vdash \neg\left([\oplus_{1,2}]\, x_1\right) \wedge \neg\left([\oplus_{1,2}]\, z_2\right) \\
&\dashv\vdash \neg\left(x_1 \underline{\vee} x_2\right) \wedge \neg\left(z_1 \underline{\vee} z_2\right) \\
&\dashv\vdash (x_1 \leftrightarrow x_2) \wedge (z_1 \leftrightarrow z_2)
\end{aligned}
$$

مثال. دورنوردی کوانتومی

یکی از مهم‌ترین نتایج بدست آمده در نظریه اطلاعات کوانتومی که بر اساس مفهوم درهم‌تنیدگی دو کیوبیت است، دورنوردی[۱۰] کوانتومی می‌باشد. در این الگوریتم با استفاده از دو کیوبیت درهم‌تنیده‌شده که هر یک از آن‌ها در اختیار یکی از دو شخص $Alice$ و Bob قرار گرفته است، یکی از آن‌ها قادر خواهد بود حالت کیوبیت سومی را به شخص دیگر منتقل کند بدون آنکه کیوبیت را برای شخص بفرستد. از مداری که الگوریتم دورنوردی را اجرا می‌کند در شکل زیر آمده است.

[10] Teleportation



با استفاده از قضیه‌ای که در بالا بیان کردیم، داریم:

$$[H_۱][\oplus_{۱,۲}](x_۱ \veebar x_۲) \dashv\vdash [H_۱]x_۱ \dashv\vdash z_۱$$

در ادامه برای سادگی برای نشان دادن z_j و x_j در مرحله i از نمادهای z_j^i و x_j^i استفاده می‌کنیم. بنابراین خط بالا را با توجه به مدار می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$z_۱^۲ \dashv\vdash x_۱^۱ \dashv\vdash x_۱^۰ \veebar x_۲^۰$$

به طور مشابهی داریم:

$$[H_۱][\oplus_{۱,۲}](z_۱ \veebar z_۲) \dashv\vdash z_۲$$

پس:

$$z_۲^۲ \dashv\vdash z_۱^۰ \veebar z_۲^۰$$

از طرفی با توجه به اینکه سیم ۳ تغییری نکرده است داریم:

$$z_۳^۲ \dashv\vdash z_۳^۰ \qquad , \qquad x_۳^۲ \dashv\vdash x_۳^۰$$

از سویی دیگر کیوبیت‌های ۲ و ۳ در ابتدا در حالت بل بودند بنابراین:

$$z_۲^۰ \dashv\vdash z_۳^۰ \qquad , \qquad x_۲^۰ \dashv\vdash x_۳^۰$$

با توجه به آنچه به دست آورده‌ایم می‌توان نتیجه گرفت:

$$x_۱^۰ \dashv\vdash x_۳^۲ \veebar z_۱^۲ \qquad , \qquad z_۱^۰ \dashv\vdash z_۳^۲ \veebar z_۲^۲$$

برای قسمتی از مدار که مربوط به بعد از اندازه‌گیری است، خواهیم داشت:

$$[H_۳][\oplus_{۱,۳}]H_۳[\oplus_{۲,۳}](z_۲ \veebar z_۳) \dashv\vdash z_۳$$

پس:

$$z_۳^۴ \dashv\vdash z_۲^۳ \veebar z_۳^۳$$

به طور مشابهی می‌توان نشان داد:

$$x^{4}_{3} \dashv\vdash z^{3}_{1} \veebar x^{3}_{3}$$

حال با توجه به معناشناسی تعریف‌شده برای اندازه‌گیری، داریم:

$$\begin{aligned}
[m_z(1)]\,(x_3 \veebar z_1) &\dashv\vdash (x_3 \veebar z_1) \vee [\sigma_{z,1}]\,(x_3 \veebar z_1)\\
&\dashv\vdash (x_3 \veebar z_1) \vee ([\sigma_{z,1}]\,x_3 \veebar\ [\sigma_{z,1}]\,z_1)\\
&\dashv\vdash (x_3 \veebar z_1) \vee (x_3 \veebar z_1)\\
&\dashv\vdash (x_3 \veebar z_1)
\end{aligned}$$

پس تعبیر گزاره‌ی $x_3 \veebar z_1$ پس از اندازه‌گیری تغییری نمی‌کند. به طور مشابهی می‌توان نشان داد که تعبیر گزاره‌ی $z_3 \veebar z_2$ نیز پس از اندازه‌گیری تغییری نمی‌کند.

در نهایت با استفاده از نتایج بدست آمده در بالا داریم:

$$z^{4}_{3} \dashv\vdash z^{0}_{1} \qquad , \qquad x^{4}_{3} \dashv\vdash x^{0}_{1}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که x و z کیوبیت اول در مرحله صفرم به کیوبیت سوم در مرحله آخر منتقل شده‌اند.

۵.۲ کارهای دیگر

این بخش را با معرفی نحو و معناشناسی جبری منطق کوانتومی که توسط فون نویمان و بیرکهف معرفی شده بود آغاز کردیم. در ادامه رویکرد برونه و ژوراند برای ساختن منطقی مناسب برای توصیف الگوریتم‌های کوانتومی بیان کردیم. همان‌طور که خود این دو نفر در مقاله ذکر کرده‌اند، یک مشکل جدی در توسعه‌ی رویکرد آن‌ها این است که تئوریشان در بستر منطق کلاسیک کوانتومی بنا شده است و فقدان ویژگی‌هایی مانند توزیع‌پذیری عطف روی فصل (فصل روی عطف) مانعی برای پیشروی این تئوری است. معهذا توجه این دو نفر به توصیف منطقی دینامیک‌های کوانتومی پیشگامانه بوده است. با این وجود شکوفایی چنین رویکردی را می‌توان در کارهای مکتب هلندی [11] جست و جو کرد که زیر نظر بالتاگ[12] و اسمتس[13] به توسعه‌ی منطق دینامیکی کوانتومی منجر شده‌است؛ منطقی که از شاخه‌ای از منطق موجهات که به آن منطق دینامیکی گزاره‌ای (PDL) گفته می‌شود، الهام گرفته شده است. از آن‌جا که PDL چهارچوب مناسبی برای توصیف منطقی برنامه‌های کامپیوتری کلاسیک است، دور از انتظار نیست که رویکرد مکتب هلندی برای مقاصد محاسباتی و اطلاعاتی موفقیت‌آمیزتر بوده باشد.

مراجع

[1] Ardeshir, M. *Mathematical Logic*, 2 ed., vol. 1. Hermes, 2020.

[11] Dutch school
[12] Alexandru Baltag
[13] Sonja Smets

[2] Asadi, S., and Nabavi, L. Semantic of logical connective in quantum logic. *Iranian Journal of Applied Physics 2*, 1 (2012), 5–22.

[3] Baltag, A., and Smets, S. The logic of quantum programs.

[4] Beigi, S. Lecture notes on quantum computing, Mar 2011.

[5] Brunet, O., and Jorrand, P. Dynamic quantum logic for quantum programs, 2003.

[6] Chiara, M., Giuntini, R., and Greechie, R. *Reasoning in Quantum Theory: Sharp and Unsharp Quantum Logics*. Trends in Logic. Springer Netherlands, 2013.

[7] Dunn, J. M., Moss, L. S., and Wang, Z. Editors' introduction: The third life of quantum logic: Quantum logic inspired by quantum computing. *Journal of Philosophical Logic 42*, 3 (2013), 443–459.

[8] Gharibian, S. Lecture notes on introduction to quantum computation, Jul 2021.

[9] Platzer, A. Lecture notes on theory of dynamic logic, Apr 2010.

[10] Sack, J. Lecture notes on quantum logic, Jan 2015.

[11] Zhong, S. An introduction to quantum logic - part ii algebraic semantics of quantum logic, Jul 2016.